

Apuntes de Macroeconomía Avanzada

José L. Torres Chacón
Departamento de Teoría e Historia Económica
Universidad de Málaga

Septiembre 2010

Indice

I	Modelos dinámicos básicos	3
1	Introducción a la Macroeconomía Dinámica	5
1.1	Introducción a la Macroeconomía	5
1.2	Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos	10
1.2.1	Definición de modelo macroeconómico	11
1.2.2	Un modelo en términos dinámicos	17
1.3	Un ejemplo de sistema dinámico	23
1.3.1	Condiciones de equilibrio dinámicas	23
1.3.2	Análisis de estabilidad	24
1.3.3	Estado Estacionario	26
1.3.4	El sistema en desviaciones respecto al estado estacionario	27
1.3.5	Representación gráfica y diagrama de fases . . .	27
1.3.6	Análisis de perturbaciones	33
1.3.7	Las funciones impulso-respuesta	37
2	Modelos dinámicos básicos	39
2.1	Introducción	39
2.2	Ejercicio 1: El modelo más simple jamás visto	40

2.3	Ejercicio 2: La economía en términos reales	63
2.3.1	Efectos de un aumento en la cantidad de dinero	68
2.4	Ejercicio 3: La política monetaria	71
2.4.1	Efectos de un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero	75
2.5	Ejercicio 4: El desbordamiento del tipo de cambio . .	77
2.5.1	Efectos de un aumento en la cantidad de dinero	85
2.6	Ejercicio 5: Perturbaciones anticipadas	90
2.7	Ejercicio 6: Política monetaria restrictiva	95
2.7.1	Efectos de una política monetaria restrictiva .	101
2.7.2	Efectos de un aumento en la cantidad de dinero	104
2.7.3	Combinación de una política monetaria restric- tiva con aumento simultáneo en la cantidad de dinero	106
II	Equilibrio General Dinámico	109
3	La elección intertemporal de los consumidores	111
3.1	Introducción	111
3.2	La decisión de consumo en tiempo discreto	114
3.2.1	El problema del consumidor en dos periodos . .	118
3.2.2	El problema del consumidor con vida finita . .	121
3.2.3	Especificación de la función de utilidad	123
3.2.4	El problema del consumidor con incertidumbre	125
3.3	El problema del consumidor en tiempo continuo	132
3.3.1	Un ejemplo: La función CRRA	136
3.4	La Decisión consumo-ocio	138
3.4.1	La decisión de consumo-ocio con trabajo y sin capital	140
3.4.2	La decisión de consumo-ocio con trabajo y con capital	145
3.5	Extensiones a los supuestos básicos	147
3.5.1	Individuos optimizadores	148
3.5.2	Mercados de capitales perfectos	149
3.5.3	Preferencias aditivamente separables	149
3.5.4	El ahorro es sólo una variable de estado	150
4	Las empresas y la decisión de inversión	151
4.1	Introducción	151

4.2	La empresa representativa	153
4.2.1	La función de tecnología	153
4.2.2	La maximización de beneficios	156
4.3	La maximización de beneficios intertemporal	159
4.4	Costes de ajuste de la inversión	162
4.5	La Q de Tobin	167
4.5.1	Ejemplo	173
4.6	Análisis de perturbaciones	174
5	El gobierno y la política fiscal	179
5.1	Introducción	179
5.2	Los impuestos	182
5.2.1	La curva de Laffer	189
5.2.2	El problema del consumidor con impuestos	191
5.2.3	El problema de las empresas con impuestos	197
5.3	El gasto público	200
5.3.1	Gasto corriente	202
5.3.2	Gasto en inversión	205
5.4	La equivalencia ricardiana	206
5.4.1	El modelo de generaciones solapadas	208
5.4.2	Las herencias	209
5.5	Sistemas de Seguridad Social	214
5.5.1	Sistemas de Seguridad Social de capitalización	215
5.5.2	Sistemas de Seguridad Social de reparto	216
6	El modelo básico de equilibrio general dinámico	219
6.1	Introducción	219
6.2	Los consumidores	222
6.3	Las empresas	227
6.4	Equilibrio del modelo	231
6.4.1	Equilibrio del modelo (Equilibrio competitivo)	233
6.4.2	Equilibrio del modelo (Dictador benevolente)	236
6.4.3	El estado estacionario	239
6.5	El modelo con impuestos	240
6.6	Ampliaciones al modelo básico	246
6.6.1	Restricciones a la liquidez	249
6.6.2	Hábitos de consumo	250
6.6.3	Ratio de uso variable del capital	253
6.6.4	Costes de ajuste de la inversión	255
6.6.5	Progreso tecnológico específico a la inversión	258

6.6.6	Economía abierta	259
6.6.7	Ampliación Nuevo Keynesiana	261

III Crecimiento Económico 263

7 Introducción al crecimiento económico 265

7.1	Introducción	265
7.2	El fenómeno del crecimiento económico	268
7.3	La acumulación de capital	276
7.3.1	El estado estacionario	280
7.3.2	La regla de oro de la acumulación de capital	284
7.4	La tasa de crecimiento de la economía	288
7.4.1	La convergencia	290
7.5	El progreso tecnológico	292
7.6	Descomposición del crecimiento	298
7.6.1	Función de producción Cobb-Douglas	300

8 Crecimiento económico óptimo: El modelo de Ramsey 303

8.1	Introducción	303
8.2	Las familias	305
8.2.1	Función de utilidad logarítmica	309
8.3	Las empresas	311
8.3.1	Función de producción Cobb-Douglas	312
8.4	El equilibrio competitivo	313
8.4.1	El estado estacionario	314
8.4.2	El consumo de estado estacionario y la regla de oro	317
8.4.3	Ejemplo: Función de utilidad logarítmica y tecnología Cobb-Douglas	319
8.5	Análisis de perturbación: Efectos de una alteración del deseo a ahorrar	320

9 La Tecnología AK 323

9.1	Introducción	323
9.2	La tecnología AK y el crecimiento económico	325
9.2.1	Formas alternativas de introducir la tecnología AK	326

9.2.2	El modelo neoclásico, el crecimiento endógeno y la tecnología AK	328
9.2.3	La trampa de la pobreza	333
9.3	El modelo con rendimientos constantes del capital . . .	336

Prefacio

El presente documento forma parte de un conjunto de tres manuales que se corresponden con la materias de la asignatura Macroeconomía Avanzada II, que imparte el Departamento de Teoría e Historia Económica en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Málaga, en el cuarto curso de la Licenciatura de Economía. Se trata fundamentalmente de un curso de introducción a la macroeconomía dinámica con el cual se cierra el aprendizaje de macroeconomía en la Licenciatura pero que al mismo tiempo sienta las bases para que el alumno pueda seguir cursando estudios de postgrado en economía con una sólida base respecto a los fundamentos de la macroeconomía actual.

El material que se imparte en esta asignatura se ha dividido en un total de tres manuales: Uno teórico, Apuntes de Macroeconomía Avanzada (AMA); otro de ejercicios resueltos, Ejercicio de Macroeconomía Avanzada (EMA); y un tercero de ejercicios numéricos y de computación, Macroeconomía Avanzada Computacional (MAC). En los tres manuales se ha intentado mantener una estructura similar, correspondiente al programa de la asignatura, pero con unos objetivos y contenidos muy diferentes entre ellos, siendo totalmente complementarios.

El presente manual, Apuntes de Economía Avanzada (AMA) supone una guía general para los alumnos, presentando los

contenidos de la asignatura a nivel teórico. El objetivo fundamental del curso es el de introducir a los alumnos en la Macroeconomía Dinámica. Para ello, se introduce al alumno en las herramientas básicas del análisis dinámico, fundamentalmente el uso de ecuaciones diferenciales para definir el comportamiento a lo largo del tiempo de las diferentes variables macroeconómicas. Adicionalmente, también se introducen determinadas técnicas de optimización dinámica. El objetivo que se pretende es la construcción del modelo de equilibrio general dinámico básico, y el estudio de sus componentes y sus principales características. Este modelo es la piedra angular de la macroeconomía actual, por lo que es de gran importancia que el alumno que vaya a finalizar sus estudios en la Licenciatura de Economía tenga un conocimiento mínimo del mismo.

Málaga, Septiembre de 2010

José L. Torres

Parte I

**Modelos dinámicos
básicos**

1

Introducción a la Macroeconomía Dinámica

- 1.1. Introducción a la Macroeconomía
- 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos
- 1.3. Un ejemplo de sistema dinámico

1.1 Introducción a la Macroeconomía

A partir de este momento vamos a iniciar un recorrido que a unos les va a parecer fascinante y a otros falo de interés y aburrido. El objetivo último que perseguimos es intentar comprender el funcionamiento de una economía a nivel agregado, objetivo que no va a resultar fácil por la complejidad del fenómeno que vamos a estudiar. No obstante, vamos a recurrir al uso de unos instrumentos relativamente simples que nos van a permitir comprender muchos de los elementos fundamentales que determinan el comportamiento de una economía.

Ya tenemos una visión más o menos exacta de qué entendemos por Economía y su ámbito de estudio. La Economía la podemos definir

como una ciencia que se dedica al estudio del comportamiento de una sociedad en términos de los **incentivos** y de las restricciones que afectan a las decisiones de los agentes sobre cómo distribuir unos recursos limitados entre diferentes usos. En principio, comparte con otras disciplinas (Psicología, Sociología) la definición de ciencia social, pero poniendo el énfasis en los **incentivos** que afectan a las decisiones de los agentes.

Tradicionalmente la Economía aparece dividida en dos áreas artificialmente separadas: microeconomía y macroeconomía. Mientras la microeconomía centra su atención en el comportamiento de un agente individual (consumidor, empresa, gobierno) o de un mercado determinado, la macroeconomía se centra en el estudio de las principales variables a nivel agregado. Aunque en el pasado las diferencias entre ambas áreas han sido significativas y han llevado a resultados contradictorios, en la actualidad la macroeconomía y la microeconomía caminan juntas de la mano. La macroeconomía actual está fundamentada en la microeconomía, lo que provoca que ya no sea tan clara dicha distinción. De hecho, tal y como iremos viendo a lo largo de este curso, la frontera entre lo que tradicionalmente se ha venido en llamar microeconomía y la macroeconomía, la vamos a atravesar en múltiples ocasiones.

Esta división entre el análisis micro y el análisis macro no es exclusiva de la economía, sino que también aparece en otras ciencias como la Física. Así, la Física aparece dividida en dos campos diferenciados y contrapuestos:

- Mecánica Cuántica: cuyo objeto de estudio del comportamiento del universo a nivel de billonésimas de milímetro (sería el equivalente a nuestra microeconomía).
- Teoría de la Relatividad o de la Gravedad: cuyo objeto de estudio del comportamiento del universo a niveles de millones de kilómetros (sería el equivalente a nuestra macroeconomía).

El principal problema al que se enfrenta la Física, es que los resultados a nivel micro (mecánica cuántica) son contrarios a los resultados a nivel macro (teoría de la relatividad). Este desacople entre los diferentes enfoques de una ciencia, ha sido resuelto actualmente en el campo de la Economía. En la macroeconomía clásica también existía una desconexión entre los

resultados que se obtenían a nivel microeconómico y los resultados a nivel macroeconómico. Sin embargo, los modelos actuales a nivel macroeconómico son compatibles con los modelos microeconómicos. Es a este proceso de coherencia, a lo que se ha venido en llamar la microfundamentación de la macroeconomía.

Los desarrollos actuales de la macroeconomía están basados en fundamentos microeconómicos, es decir, parten del estudio de las decisiones de los diferentes agentes económicos que interactúan en el mercado, después de un largo periodo en el cual existía una importante ruptura entre ambas disciplinas. No es que la macroeconomía pretenda descender a las decisiones de los consumidores o empresas individuales, pero sí que es importante que sus teorías sean consistentes con el comportamiento subyacente de millones de consumidores y empresas que conforman una economía.

La macroeconomía usa modelos formales y rigurosos con el objeto de ofrecer explicaciones a los diferentes problemas de las economías agregadas e intentar ofrecer soluciones o recomendaciones de política. La macroeconomía actual está formalizada a través de modelos de alto contenido matemático y usa el método científico de medida, teoría y validación de la misma. La medida, que es una descripción de los hechos, es un paso necesario en cualquier investigación económica, pero esta descripción no constituye por sí misma una explicación de los mismos. Para eso se hace necesario el segundo paso: la elaboración de una teoría. Aunque torturemos los datos, estos no hablarán por sí solos. Los hechos sólo hablan a través de los modelos. El tercer paso es el más complicado. Los modelos teóricos están basados en supuestos abstractos, que suponen una simplificación de la realidad, pero pueden ser muy útiles para describirla. Por tanto, no es posible rechazar modelos porque partan de supuestos que estimamos no demasiado realistas. Más bien, la validación debe realizarse en función de la utilidad de dichos modelos para explicar la realidad, y si son superiores o no a otros modelos en dicha explicación.

Al usar el método científico, la economía es similar a las ciencias puras, como la física o la biología. La principal diferencia es que la economía es una ciencia social, por lo que no es posible realizar experimentos controlados como en dichas ciencias, aunque sí es posible usar los modelos como economías artificiales. De hecho, esto hace que la modelización macroeconómica, esto es, la construcción de

modelos teóricos, sea un elemento fundamental para poder avanzar en el conocimiento del funcionamiento de una economía.

A su vez, la Macroeconomía también se divide en dos tipos de análisis, que se diferencian fundamentalmente en el enfoque temporal utilizado:

- **Largo plazo:** Su objetivo fundamental es analizar el fenómeno del crecimiento económico y de sus factores determinantes. Se trata de estudiar el comportamiento de la economía desde un enfoque temporal que implica un lapso de tiempo muy elevado, que pueden ser décadas, siglos o milenios. Desafortunadamente, no tenemos series temporales económicas tan largas, por lo que en la mayoría de los casos los estudios se reducen a unas cuantas décadas.
- **Corto plazo:** En este caso el objetivo fundamental es analizar el fenómeno de las fluctuaciones cíclicas que muestran las economías. Se trata de estudiar el comportamiento de la economía en periodos de tiempos más reducidos, que se pueden medir en años o en pocas décadas, y de analizar las fluctuaciones que experimentan la mayoría de variables macroeconómicas así como la relación entre las mismas a lo largo del ciclo.

La macroeconomía ha ido evolucionando en el tiempo en un continuo avance para explicar el comportamiento de unas economías también cambiantes en el tiempo. Retrotrayéndonos a los Clásicos (Smith, Ricardo,...), encontramos que no existía distinción entre la microeconomía y la macroeconomía. La denominada revolución keynesiana supuso un importante replanteamiento de los problemas económicos con respecto a la economía clásica, siendo el origen de lo que posteriormente se denominó la síntesis neoclásica, que constituyó el enfoque adoptado hasta los años 70. Un poco antes de la revolución keynesiana, se pondría la pieza fundamental de la macroeconomía actual, debido a los avances realizados por Ramsey a finales de la década de los veinte, en los que también participaría Keynes. Sin embargo, los desarrollos realizados durante los años 40 a 70, supusieron un retroceso respecto a estos avances, desarrollos que serían abandonados a partir de la introducción de las expectativas racionales y la crítica de Lucas.

La Nueva Economía Clásica desarrollada a partir de los 70, supuso una nueva forma de hacer macroeconomía, cuyo eje fundamental era el equilibrio walrasiano, convirtiéndose en el enfoque imperante, si bien simplemente consiste en volver atrás en el tiempo a los planteamientos formulados por Ramsey al final de la década de los veinte del siglo pasado. Actualmente, la macroeconomía está centrada en el desarrollo de modelos dinámicos de equilibrio general más complejos, a pesar de las importantes limitaciones que ofrece este marco de análisis.

La macroeconomía actual está construida en torno a dos piezas angulares fundamentales: la denominada microfundamentación de la macroeconomía y el equilibrio general. De este modo, tanto la micro como la macro son aplicaciones consistentes de la teoría neoclásica. Esto significa modelizar el comportamiento de los diferentes agentes económicos en base a unos supuestos fundamentales. De este modo, se supone que los agentes son optimizadores, esto es, maximizan una determinada función objetivo, dadas unas dotaciones, unas preferencias y una tecnología. Por otra parte, el equilibrio general postula una situación en la cual las decisiones de los agentes son compatibles entre sí.

Antes de finalizar esta introducción, vamos a realizar una puntualización sobre la determinación de las variables macroeconómicas. Uno de los conceptos clave que tenemos que tener claro en los desarrollos que vamos a realizar es distinguir entre **variables endógenas y exógenas**. Esta distinción es muy importante, dado que refleja una diferente naturaleza de las variables económicas y condiciona el tratamiento que le tenemos que dar para resolver los modelos. Las variables endógenas son aquellas que se determinan dentro del propio sistema económico, como resultado de las decisiones que toman los agentes económicos. Estas son las variables para las que tenemos que resolver nuestro modelo. Por el contrario, las variables exógenas vienen determinadas fuera del sistema económico y, por tanto, las tomamos como dadas. En términos generales, las variables instrumento de las políticas económicas y de decisión del gobierno, vamos a suponer que son exógenas a la economía. Podrían ser endógenas, si incluyéramos una función objetivo para el gobierno, por ejemplo, en términos de maximización del bienestar social.

Así variables como el nivel de producción, el nivel de precios, los tipos de interés, el stock de capital, el nivel de empleo, el tipo

de cambio, etc., son variables endógenas y se determinan dentro del sistema económico. Por el contrario variables como los tipos impositivos, la cantidad de dinero, el gasto público, y en general todas las variables de decisión del gobierno, son, en cierta medida, variables exógenas, que se determinan fuera del sistema económico, aunque no son independientes del mismo. Por su parte, variables como un terremoto o un ataque marciano son totalmente exógenas en términos económicos.

En términos generales, el análisis macroeconómico consiste en, dada una determinada perturbación que se produce en un determinado momento del tiempo, esto es, una alteración en una variable exógena, calcular cuáles son sus efectos sobre las distintas variables endógenas a lo largo del tiempo. Un ejemplo sería estudiar cuáles son los efectos de un aumento en los precios del petróleo. A esto es a lo que vamos a denominar un análisis de perturbación.

1.2 Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

A partir de este momento vamos a considerar una nueva variable que va a ser fundamental en nuestro análisis. Este nuevo elemento que vamos a incorporar es el tiempo, (t) , por lo que a partir de ahora vamos a adoptar un enfoque dinámico frente a las aproximaciones estáticas. Este nuevo elemento va a tener una gran importancia, dado que nos va a permitir el análisis del comportamiento de una economía a lo largo del tiempo. En efecto, la vida es dinámica, es decir, las acciones y decisiones de hoy afectan a nuestra capacidad de decidir mañana y al conjunto de acciones que podamos acometer en el futuro y, por tanto, también lo va a ser la economía. Si tratamos de explicar el funcionamiento de una economía adoptando un enfoque estático, probablemente fracasemos en el intento.

Esto significa que los instrumentos que vamos a utilizar van a ser diferentes a los del análisis estático. Así, ahora vamos a especificar los modelos teóricos en términos dinámicos, utilizando instrumentos tales como las ecuaciones diferenciales y los problemas de optimización dinámicos.

La necesidad de utilizar un enfoque dinámico, viene justificada, entre otras cosas, por el hecho de que no todas las variables económicas se mueven a la misma velocidad. Así, por ejemplo, los precios de los bienes y servicios se ajustan muy lentamente en

el tiempo mientras que, por ejemplo, el tipo de cambio es una variable económica que se ajusta de manera inmediata. Esto hace que la respuesta de la economía a una determinada perturbación sea relativamente compleja y no se tienda al equilibrio de forma inmediata. Por otra parte, la consideración de un entorno dinámico hace que las diferentes variables económicas únicamente tienen significado si están referidos a un momento determinado del tiempo. Esto lo vemos claramente en variables como la inversión, ya que las inversiones de hoy afectan a la capacidad productiva futura; los hijos de hoy serán los trabajadores del futuro y el exceso de gasto público se transforma en deuda que deberá ser pagada en periodos sucesivos, etc. Dado que estas variables forman parte del fenómeno objeto de nuestro estudio, para el mismo debemos adoptar un enfoque dinámico.

Por último, cuando introducimos el tiempo en los modelos macroeconómicos, tenemos dos posibilidades: considerar el tiempo como una variable continua o bien como una variable discreta. El resultado va a ser cualitativamente el mismo, pero determinados modelos macroeconómicos resulta más fácil describirlos en tiempo continuo mientras que otros será más fácil definirlos en tiempo discreto.

1.2.1 *Definición de modelo macroeconómico*

La estrategia que vamos a adoptar para intentar entender el comportamiento y funcionamiento de una economía es a través de la construcción de lo que denominamos un modelo macroeconómico. Un modelo macroeconómico consiste en una simplificación de la realidad. La necesidad de simplificar podemos ilustrarla a través de una idea muy simple. Si queremos ir a una ciudad que no conocemos, pero queremos tener información sobre ella, podemos acudir a un plano o callejero de esa ciudad. El plano de la ciudad supone una simplificación de la misma, pero constituye un instrumento extremadamente útil para poder movernos en ella.

La figura 1.1 muestra la representación (el modelo en nuestro contexto) de la geografía de nuestro planeta. Esta representación supone una simplificación enorme de la realidad, al tiempo que no la representa de forma exacta. Todos sabemos que La Tierra es redonda y la figura 1.1 la representa como si fuese plana. Además La Tierra es mucho más grande y tiene muchos más elementos de

los que pueden caber en la figura 1.1, donde no podemos ver los ríos, sistemas montañosos y mucho menos la ciudad donde vivimos. Sin embargo, este mapa constituye un instrumento de extraordinaria utilidad. Y su utilidad viene dada precisamente por su simplicidad.



Figura 1.1. Mapa mundi

Un modelo económico es equivalente a nuestro mapa de la economía. Constituye una simplificación del comportamiento de una economía, pero nos permite un conocimiento de la misma que no sería posible sin disponer del mismo. Esta simplificación, aún cuando pueda parecer irreal y con información limitada, es el único instrumento disponible para poder entender el comportamiento de una economía.

Los modelos económicos han ido cambiando con el tiempo, a medida que ha avanzado nuestro entendimiento del comportamiento de la economía, incorporando nuevos elementos y piezas de información con el objeto de mejorar su poder explicativo. Seguramente aún estamos muy lejos de comprender el funcionamiento de una economía, pero hemos realizado algunos avances en este sentido. Por otra parte, el desarrollo de otras ciencias, como la física, también ha tenido un reflejo en los modelos económicos, que han ido incorporando herramientas matemáticas más complejas y sofisticadas. Como consecuencia de estos desarrollos, los modelos económicos se han hecho

más complejos con el paso del tiempo (lo cual no es una característica positiva sino más bien negativa) pero al mismo tiempo son más explicativos de los fenómenos que observamos.

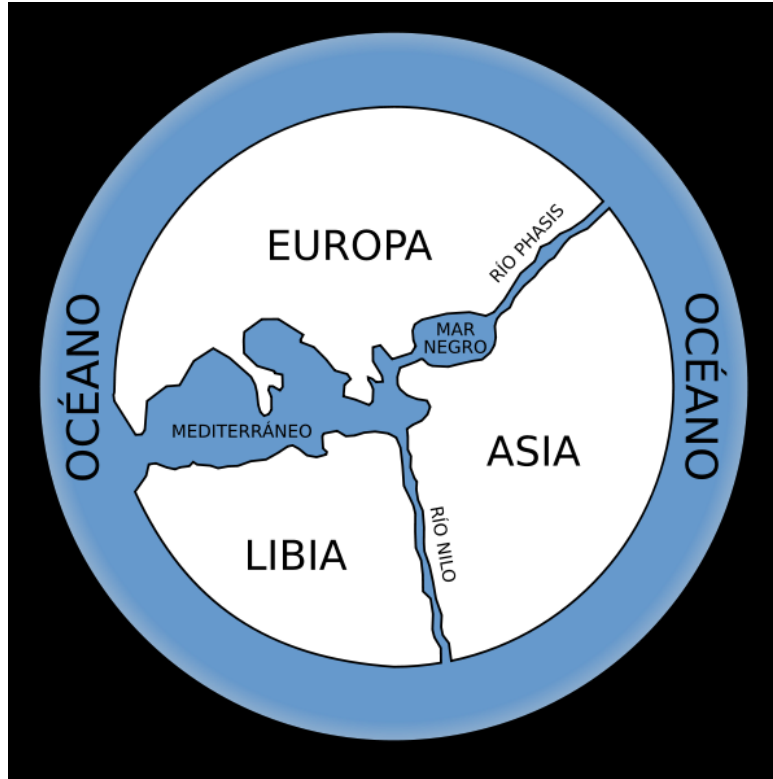


Figura 1.2. Primer mapa mundi, realizado por Anaximandro (610-546 a.c.)

Si observamos el mapa mundi realizado por Anaximandro (Figura 1.2) y lo comparamos con el que disponemos en la actualidad, podemos inferir su poder explicativo de la realidad. El mapa de Anaximandro constituye una aproximación a la realidad muy limitada, con múltiples imperfecciones. Pero aún así, constituyó una aproximación muy útil para el tiempo en el cual fue realizada. Lo que estamos haciendo aquí es comparar dos modelos, los cuales constituyen simplificaciones de la realidad que son más o menos precisas y que vienen condicionados por el grado de conocimiento que tengamos acerca de la realidad a la cual queremos representar.

Por otra parte, cuando hablamos de un plano o de un mapa, es muy importante el concepto de escala. Así, si queremos conocer un determinado territorio geográfico, podemos usar diferentes escalas de planos. La figura 1.1 muestra la escala más pequeña posible para representar la superficie del planeta Tierra. Este sería el modelo adecuado si estamos interesados en conocer toda la superficie del planeta. Sin embargo, si sólo estuviésemos interesados en conocer cómo es Europa, utilizaríamos un mapa de menor escala, correspondiente a este continente. Si por el contrario estuviésemos interesados en conocer cómo es Grecia, utilizaríamos un mapa con una escala aún menor, tal y como muestra la figura 1.3.



Figura 1.3. Mapa de Grecia

Si comparamos la figura 1.1 con la figura 1.3, observamos importantes diferencias en cuanto a la información que aportan. Así, la figura 1.1 nos aporta más información sobre el todo, pero con menor nivel de detalle. Por ejemplo, no disponemos de información sobre los principales ríos. Por el contrario, la figura 1.3, nos ofrece mayor nivel de detalle respecto a Grecia y sus islas, pero refleja de una manera parcial la realidad geográfica. Si aumentáramos la

escala, aún obtendríamos un mayor nivel de detalle, dado que no sólo tendríamos información sobre las islas griegas, que no vemos en la figura 1.1, sino también información sobre los principales ríos, sistemas montañosos, ciudades, etc. Del mismo modo existe una gran escala de modelos económicos, similares a la escala que aparece en los distintos planos. Así, tenemos modelos económicos muy grandes, a gran escala, con multitud de ecuaciones que contemplan muchos mercados y una gran cantidad de variables económicas, y otros modelos a pequeña escala, que se centran en el comportamiento de unas pocas variables económicas.

Obviamente, la escala 1:1 es la propia realidad. Así, un modelo de escala 1:1 no tendría absolutamente ninguna utilidad, dado que ya tenemos a la realidad misma de la cuales estamos buscando una representación, lo que sería absurdo.

El concepto de modelo macroeconómico que vamos a usar es el siguiente:

Un modelo macroeconómico puede describirse como un sistema de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones incluyen un número de relaciones dinámicas entre un conjunto de variables endógenas $X_t \in R^n$ y un conjunto de variables exógenas $Z_t \in R^m$.

Como podemos comprobar, la construcción de un modelo macroeconómico es similar a los modelos para explicar el comportamiento de un sistema físico, excepto por una importante diferencia: el comportamiento de la economía depende de las expectativas generadas por el pensamiento humano.

En términos generales, la estructura de un modelo macroeconómico estaría formada por los dos siguientes sistemas de ecuaciones:

$$X_t = E_t [F(X_{t+1}, Z_t, u_t)] \quad (1.1)$$

$$Z_t = G(Z_{t-1}, v_t) \quad (1.2)$$

donde X_t es un vector de variables endógenas, Z_t vector de variables exógenas, E_t operador de expectativas, y u_t y v_t son perturbaciones aleatorias i.i.d. (idénticas e independientemente distribuidas). La función F es lo que va a definir la **Teoría Económica**, mientras que la función G es a lo que se denomina las **Reglas de Política**.

En la práctica tendríamos una gran cantidad de ecuaciones. La solución a este sistema de ecuaciones estocásticas sería una secuencia de distribuciones de probabilidad.

Sin embargo, la estructura anterior es excesivamente complicada para nuestros propósitos. Vamos a simplificar esta estructura general, de tal forma que tengamos una estructura muy simple pero que siga siendo válida para explicar el funcionamiento de la economía. De hecho, esta es una de las reglas sagradas que tenemos que cumplir en todo momento, de modo que el modelo que utilicemos sea lo más simple posible.

En primer lugar, vamos a eliminar el segundo sistema de ecuaciones, es decir, eliminamos la regla de política ($G = 0$). Este sistema es importante si estamos haciendo Política Económica, esto es, si trabajamos para el Ministerio de Economía y necesitamos conocer cuáles serían, por ejemplo, el nivel de impuestos que genera el máximo nivel de bienestar y de actividad económica o, dada una determinada perturbación, cuáles son las mejores medidas que se pueden instrumentar. Sin embargo, este curso es de Macroeconomía y nuestro objetivo fundamental es más simple, consistiendo en intentar explicar el comportamiento de una economía, centrándonos en estudiar cuáles son los efectos de una determinada perturbación. Por tanto, nuestro modelo quedaría reducido al siguiente sistema de ecuaciones, donde todas las variables de política económica son variables que consideramos exógenas, es decir, consideramos que vienen dadas y no intentamos explicar como se determinan. Así, únicamente tendríamos que determinar las variables macroeconómicas endógenas:

$$X_t = E_t [F(X_{t+1}, Z_t, u_t)] \quad (1.3)$$

La segunda simplificación que vamos a realizar consiste en suponer la no existencia de incertidumbre ($u_t = 0$). Esto es, vamos a analizar un entorno con información completa, lo que unido a la existencia de expectativas racionales es equivalente a un mundo con previsión perfecta. Esto significa que los agentes no sólo conocen el valor de las variables en el momento actual y en los periodos anteriores, sino que también conocen el valor de las variables en los periodos futuros. Por tanto, nuestro modelo para describir el comportamiento de la economía quedaría reducido al siguiente sistema de ecuaciones:

$$X_t = [F(X_{t+1}, Z_t)] \quad (1.4)$$

1.2.2 Un modelo en términos dinámicos

Vamos a reescribir el modelo anterior en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales, que es el primer instrumento que vamos a utilizar para analizar el comportamiento de una economía. De este modo, nuestro modelo macroeconómico lo podemos escribir como un sistema de ecuaciones compuesto por ecuaciones diferenciales:

$$\dot{X}_t = F(X_t, Z_t) \quad (1.5)$$

donde un punto sobre la variable indica su derivada respecto al tiempo, tal que:

$$\dot{X}_t = \frac{dX_t}{dt} \quad (1.6)$$

La expresión (1.5) nos indica que la variación respecto al tiempo de nuestro vector de variables endógenas es una función del valor de dichas variables endógenas y del valor de las variables exógenas. De este modo, lo que nos va a indicar este sistema de ecuaciones es cómo se mueven las variables endógenas a lo largo del tiempo.

Es más fácil trabajar con logaritmos, por lo que vamos a aplicar logaritmos a todas las variables macroeconómicas (exceptuando las que vienen definidas en términos porcentuales, como los tipos de interés o la tasa de paro). Por tanto definimos:

$$x_t = \ln X_t \quad (1.7)$$

Así, la derivada con respecto al tiempo es equivalente a la tasa de crecimiento de la variable:

$$\dot{x}_t = \frac{d \ln X_t}{dt} = \frac{\frac{dX_t}{dt}}{X_t} = \frac{\dot{X}_t}{X_t} \quad (1.8)$$

lo cual es muy útil, ya que en la mayoría de los casos nuestro interés se va a centrar en la tasa de crecimiento de las variables macroeconómicas. Así, a la tasa de crecimiento del nivel de producción la denominamos crecimiento económico, a la tasa de crecimiento de los precios la denominamos inflación, etc.

En tiempo discreto tendríamos que la tasa de crecimiento de una variable sería:

$$\Delta x_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \quad (1.9)$$

expresión que es equivalente a la expresión (1.8).

En la práctica, en términos teóricos nos vamos a encontrar tanto modelos definidos en tiempo discreto como modelos definidos en tiempo continuo. Sin embargo, cuando los modelos se resuelven en términos numéricos, éstos vienen definidos en tiempo discreto.

Definición de equilibrio: Estado Estacionario

El concepto de equilibrio que vamos a usar en el análisis dinámico es un tanto especial y lo vamos a denominar Estado Estacionario. Mientras que en un análisis estático el concepto de equilibrio hace relación a una situación en la cual la oferta de una determinada variable es igual a su demanda, en el análisis dinámico el concepto de equilibrio hace relación a una situación en la cual las variables económicas se mantienen estables en el tiempo (su tasa de crecimiento es cero, por lo que son constantes). El valor de las variables en Estado Estacionario, por tanto, vendría definido por aquella situación en la cual la derivada respecto al tiempo de dichas variables fuese igual a cero.

$$\bar{x} \implies \dot{x}_t = f(x_t, z_t) = 0 \implies f(\bar{x}, z_t) = 0 \quad (1.10)$$

Esto significa que el Estado Estacionario de una economía, viene dado por un vector de ceros de dimensión n , para cada una de las derivadas temporales de las variables endógenas. Dicho equilibrio lo denotamos con una barra horizontal sobre las variables endógenas.

El sistema de ecuaciones diferenciales podemos linealizarlo y escribirlo como:

$$\dot{x}_t = Ax_t + Bz_t \quad (1.11)$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es una matriz $n \times m$ y z_t es el vector de variables exógenas $m \times 1$.

Vamos a trabajar siempre con dos ecuaciones, para poder realizar representaciones gráficas. Por tanto $n = 2$, lo cual simplifica bastante los cálculos que tenemos que realizar. En concreto, el sistema típico con el que vamos a trabajar es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + Bz_t \quad (1.12)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Para calcular el Estado Estacionario de nuestro sistema, calculamos el vector de ceros para nuestro vector de derivadas respecto al tiempo. Esto significa que la matriz A por el vector de variables endógenas tiene que ser igual al negativo de la matriz B por el vector de variables exógenas. En esta situación, el vector de variables endógenas sería su valor de Estado Estacionario:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies A \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -Bz_t \quad (1.14)$$

Despejando el vector de variables en Estado Estacionario obtenemos la siguiente expresión que nos permite calcular el valor de cada variable endógena en equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \quad (1.15)$$

Como podemos comprobar el estado estacionario de cada variable en un número, es decir, es una constante, que depende de los parámetros de las matrices A y B , y del valor de las variables exógenas. Por tanto, alteraciones de las variables exógenas provocan cambios en el valor de estado estacionario de las variables endógenas. Por tanto, el valor de estado estacionario sería constante siempre y cuando también las variables exógenas permanecieran constantes.

Concepto de Estabilidad

Los sistemas de ecuaciones que vamos a utilizar, pueden dar lugar a diferentes comportamientos para el vector de variables endógenas, dependiendo de si el modelo teórico es estacionario o no. Así, ante una perturbación, el comportamiento de las variables puede llevarnos a una nueva situación de equilibrio o bien pueden generarse trayectorias que nos alejen permanentemente del estado estacionario inicial. Las trayectorias de las diferentes variables van a depender de las características de estabilidad del sistema dinámico.

El procedimiento que vamos a utilizar para estudiar la estabilidad de nuestro sistema de ecuaciones es el siguiente. Se trata de calcular

los valores propios de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas, que definimos como λ . Es decir, la estabilidad del sistema va a depender de las características de la matriz A . Para analizar la estabilidad de nuestro sistema calculamos el determinante de la matriz de coeficientes de las variables endógenas menos la matriz identidad multiplicada por λ , e igualamos a cero.

$$\text{Det}[A - \lambda I] = 0 \quad (1.16)$$

Dado que únicamente vamos a trabajar con matrices 2x2, quedaría:

$$\text{Det} \left[\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (1.17)$$

La solución sería una ecuación de segundo grado que tendría la siguiente forma:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (1.18)$$

donde sus raíces serían:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \quad (1.19)$$

Resolviendo, podemos obtener tres posibles soluciones en función de los signos de las raíces: las dos negativas, las dos positivas o una positiva y la otra negativa (Cuadro 1.1).

Cuadro 1.1: Soluciones posibles de la estabilidad del sistema

Raíces (valores propios)	Caso 1	Caso 2	Caso 3
λ_1	<0	<0	>0
λ_2	<0	>0	>0

- Caso 1 ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$): La solución en la cual las dos raíces son negativas, la denominamos de estabilidad global. En este caso, todas las trayectorias temporales de las variables endógenas tienden al Estado Estacionario, es decir a una situación de equilibrio. De este modo si se produce una perturbación, las variables endógenas vuelven al nuevo estado estacionario, independientemente del tipo de perturbación

que se produzca. Esto significa que cualquier estado de la naturaleza producido por el modelo puede tener, en principio, significado en términos económicos. Tal y como podemos observar en la figura 1.4, todas las trayectorias se dirigen al Estado Estacionario, si bien pueden hacerlo de dos formas: o bien de forma directa, o bien de forma asintótica.

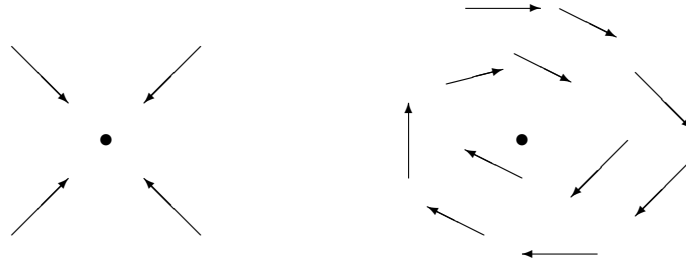


Figura 1.4. Caso 1. Estabilidad global ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$)

- Caso 2 ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$): Si una raíz es negativa y la otra positiva, obtenemos la solución denominada punto de silla de caballo. En este caso resulta que hay trayectorias que tienden al estado estacionario pero también trayectorias que se alejan del equilibrio. Esto significa que ante una perturbación que nos aleje del estado estacionario, su vuelta al mismo no está garantizada, sino que depende del tipo de perturbación que se produzca. Así, este tipo de solución nos va a indicar que determinados tipos de desequilibrios, que genera el modelo en términos matemáticos, no pueden darse en la realidad, dado que no tienen significado en términos económicos. La figura 1.5 ilustra este caso, en la que podemos observar trayectorias que llevan al Estado Estacionario con trayectorias que nos alejan de él.

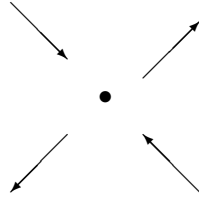


Figura 1.5. Caso 2. Punto de silla ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$)

- Caso 3 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$): En el caso de que las dos raíces sean positiva, estaríamos ante una solución que refleja inestabilidad global. En este caso todas las trayectorias tienden a alejarnos del estado estacionario, tal y como refleja la figura 1.6. Este tipo de solución no tiene explicación económica a nivel agregado, pero sí que es un tipo de sistema que existe en algunos mercados, como los financieros. En este caso, la economía no tiende a corregir los desequilibrios que existen en un momento dado del tiempo, sino que por el contrario, dichos equilibrios tienden a aumentar. Mirando el comportamiento de determinados mercados, como el de renta variable, podemos ver que este tipo de comportamiento también ocurre en la realidad. En efecto, en estos mercados se crean burbujas que suponen desviaciones muy persistente respecto a la situación de equilibrio y que pueden dar lugar a desviaciones muy significativas respecto a dicho equilibrio. No obstante, a nivel macroeconómico no pueden existir este tipo de trayectorias, por lo que aquellos sistemas que presentan este tipo de solución no pueden ser utilizados para explicar el comportamiento de una economía.

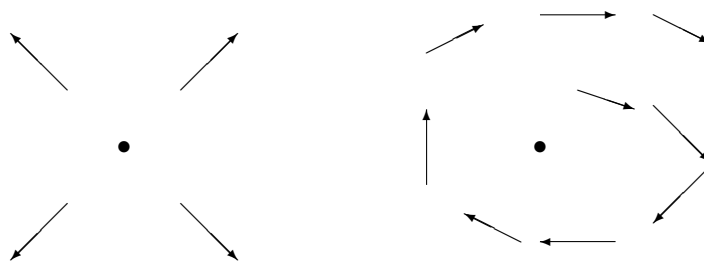


Figura 1.6. Caso 3. Inestabilidad global ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$)

1.3 Un ejemplo de sistema dinámico

Vamos a considerar el siguiente sistema dinámico, en el cual tenemos dos variables endógenas ($x_{1,t}, x_{2,t}$) y dos variables exógenas ($z_{1,t}, z_{2,t}$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Por tanto, las ecuaciones que definen el comportamiento a lo largo del tiempo de las dos variables endógenas son las siguientes:

$$\dot{x}_{1,t} = -\alpha x_{1,t} - \beta x_{2,t} - z_{1,t} \quad (1.21)$$

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} \quad (1.22)$$

1.3.1 Condiciones de equilibrio dinámicas

Las condiciones de equilibrio dinámicas parciales para dicha economía serían aquella solución particular tal que la derivada respecto al tiempo de cada variable fuese cero:

$$\dot{x}_{1,t} = -\alpha x_{1,t} - \beta x_{2,t} - z_{1,t} = 0 \quad (1.23)$$

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} = 0 \quad (1.24)$$

Dado el valor de las variables exógenas tenemos infinitas combinaciones de las variables endógenas tal que se cumple cada una de estas condiciones de equilibrio dinámico parcial.

1.3.2 Análisis de estabilidad

A continuación, vamos a realizar el análisis de estabilidad del sistema. Para realizar el análisis de estabilidad del sistema y conocer cómo van a ser las trayectorias de las variables en relación al Estado Estacionario, debemos calcular las raíces asociadas a la matriz de las variables endógenas, que denominamos λ . Para ello lo que tenemos que hacer es resolver una ecuación de segundo grado que la obtenemos de igualar a cero el determinante de la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas menos la matriz identidad multiplicada por λ . De este modo, calcularíamos:

$$\text{Det} \left[A - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (1.25)$$

de la cual obtendríamos una ecuación de segundo grado del tipo:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.26)$$

siendo sus raíces:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.27)$$

El signo de las dos raíces va a depender, por un lado del signo del coeficiente inmediatamente anterior a la raíz cuadrada ($-b$) y, por otro lado, del signo que aparece dentro de la raíz cuadrada. Así, podemos comprobar que el primer término dentro de la raíz cuadrada simplemente es el coeficiente anterior a dicha raíz pero elevado al cuadrado (b^2). Por tanto, si el segundo término de la raíz cuadrada fuese cero ($c = 0$), entonces tendríamos que al resolver la raíz cuadrada nos quedaría:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a} \quad (1.28)$$

por lo que resultaría que una de las raíces sería nula: $\lambda_1 = -b/a$; $\lambda_2 = 0$. Por tanto, la clave está en el signo que aparece en la raíz cuadrada, que es el que nos va a decir si al resolver la raíz cuadrada, el resultado es mayor o menor que el coeficiente anterior a la misma. Obviamente, si el signo es positivo, el resultado de resolver la raíz cuadrada es superior al coeficiente anterior a la misma y lo contrario sucedería si el signo dentro de la raíz cuadrada fuese negativo.

Por tanto, volviendo al sistema definido en (1.20), tendríamos

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & -\beta \\ \gamma & -\delta - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

Calculando el determinante, agrupando términos e igualando a cero, llegamos a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 + \lambda(\alpha + \delta) + (\alpha\delta + \gamma\beta) = 0 \quad (1.30)$$

cuyas raíces van a ser las siguientes:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(\alpha + \delta) \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta + \gamma\beta)}}{2} \quad (1.31)$$

Como podemos comprobar el término anterior a la raíz cuadrada es positivo. Por otra parte, el signo que aparece dentro de la raíz cuadrada es negativo, por lo que al resolver la raíz cuadrada lo que nos queda va a ser menor que el primer término. Por tanto, negativo más algo más pequeño es negativo. Negativo menos algo más pequeño, también es negativo. Por tanto, resolviendo dicha ecuación, resulta que las raíces del sistema son las dos negativas:

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \quad (1.32)$$

es decir, obtenemos una solución de estabilidad global al ser ambas raíces negativas, indicando que todas las trayectorias generadas por el modelo tienden hacia el estado estacionario.

De forma adicional, vamos a contemplar únicamente situaciones en las cuales las raíces son reales, es decir, el número que queda dentro de la raíz cuadrada no puede ser negativo. En el ejemplo anterior esto significa que:

$$(\alpha + \delta)^2 \geq 4(\alpha\delta + \gamma\beta) \quad (1.33)$$

1.3.3 Estado Estacionario

Para calcular el Estado Estacionario partimos de su definición. El Estado Estacionario se define como aquella situación en la cual todas las variables del sistema son constantes, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

para lo cual se hace necesario que:

$$A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

siendo en este caso $x_{1,t} = \bar{x}_{1,t}$ y $x_{2,t} = \bar{x}_{2,t}$. Por tanto, para calcular el valor de las variables en estado estacionario tenemos que calcular el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t. \quad (1.36)$$

Operando, obtenemos los siguientes elementos,

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta + \gamma\beta} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Multiplicando las matrices anteriores resulta que el valor de las variables en estado estacionario viene dado por las siguientes expresiones:

$$\bar{x}_{1,t} = \frac{-\delta}{\alpha\delta + \gamma\beta} z_{1,t} - \frac{\beta\eta}{\alpha\delta + \gamma\beta} z_{2,t} \quad (1.38)$$

$$\bar{x}_{2,t} = \frac{-\gamma}{\alpha\delta + \gamma\beta} z_{1,t} + \frac{\alpha\eta}{\alpha\delta + \gamma\beta} z_{2,t} \quad (1.39)$$

Como podemos comprobar, el valor es un número, dado que únicamente depende de las variables exógenas. Obviamente, si cambia el valor de las variables exógenas, también va a cambiar el valor de estado estacionario de las variables endógenas.

1.3.4 *El sistema en desviaciones respecto al estado estacionario*

El sistema anterior también podemos definirlo en términos de desviaciones respecto al estado estacionario, una vez que hemos calculado el mismo. Esta forma de representar un sistema dinámico es la más usada en la práctica, dado que nos permite estudiar el comportamiento de las variables ante una determinada perturbación, en términos de sus desviaciones respecto a su valor de equilibrio. Para ello, partimos de nuestro sistema diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

En estado estacionario resulta que:

$$A \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Por tanto, el sistema lo podemos describir como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} - \bar{x}_{1,t} \\ x_{2,t} - \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

es decir, ahora tendríamos definidas las derivadas respecto al tiempo de las variables como una proporción de la diferencia entre el valor de las variables y sus valores de estado estacionario, donde dicha proporción viene determinada por la matriz de coeficientes asociados a las variables endógenas.

Esta forma de representación se usa habitualmente cuando las ecuaciones que componen el sistema son altamente no lineales y resulta difícil trabajar con las mismas. En este caso, se procede a la linearización de estas ecuaciones en términos de sus desviaciones respecto al estado estacionario.

1.3.5 *Representación gráfica y diagrama de fases*

Una vez hemos resuelto nuestro sistema dinámico, a continuación vamos a representarlo gráficamente. La representación gráfica es el instrumento fundamental que vamos a utilizar, ya que nos va a permitir obtener una perspectiva global del funcionamiento de la economía, al tiempo que va a resultar de gran ayuda para interpretar la información contenida en las ecuaciones del sistema. De hecho, el

utilizar un sistema dinámico con dos variables endógenas es debido a que queremos obtener una representación gráfica del mismo.

Para representar nuestro sistema dinámico, lo primero que hacemos es representar una solución particular, aquella que se corresponde con el estado estacionario. Así, representaríamos la combinación de las variables endógenas, tal que cada una de ellas sea constante en el tiempo. A esto es a lo que denominamos ecuación dinámica de equilibrio parcial. Como las ecuaciones que vamos a utilizar son lineales, su representación gráfica también va a ser lineal (una línea recta). Para representarla, por tanto, únicamente necesitamos conocer su pendiente.

Vamos a representar la variable endógena 2 en el eje vertical (ordenadas), mientras que la variable endógena 1 la representamos en el eje horizontal (abcisas). Esto significa que para calcular la pendiente de las condiciones de equilibrio dinámicas tenemos que derivar la variable endógena 2 respecto a la 1, evaluada en aquellos puntos en los cuales las derivadas respecto al tiempo de dichas variables es igual a cero. Así, de cada ecuación diferencial despejamos la variable endógena 2 en términos de la variable endógena 1. Utilizando la primera ecuación diferencial e igualándola a cero resulta que:

$$\dot{x}_{1,t} = -\alpha x_{1,t} - \beta x_{2,t} - z_{1,t} = 0 \quad (1.43)$$

$$\beta x_{2,t} = -\alpha x_{1,t} - z_{1,t} = 0 \quad (1.44)$$

$$x_{2,t} = -\frac{\alpha}{\beta} x_{1,t} - \frac{1}{\beta} z_{1,t} = 0 \quad (1.45)$$

Por tanto, la pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena, $x_{1,t}$, bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, vendría dada por:

$$\left. \frac{dx_{2,t}}{dx_{1,t}} \right|_{\dot{x}_{1,t}=0} = \frac{-\alpha}{\beta} < 0 \quad (1.46)$$

A partir de la segunda ecuación diferencial, igualándola a cero, y despejando $x_{2,t}$, resulta:

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} = 0 \quad (1.47)$$

$$\delta x_{2,t} = \gamma x_{1,t} + \eta z_{2,t} = 0 \quad (1.48)$$

$$x_{2,t} = \frac{\gamma}{\delta} x_{1,t} + \frac{\eta}{\delta} z_{2,t} = 0 \quad (1.49)$$

Por lo que la pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena, bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, vendría dada por:

$$\frac{dx_{2,t}}{dx_{1,t}} \big|_{\dot{x}_{2,t}=0} = \frac{\gamma}{\delta} > 0 \quad (1.50)$$

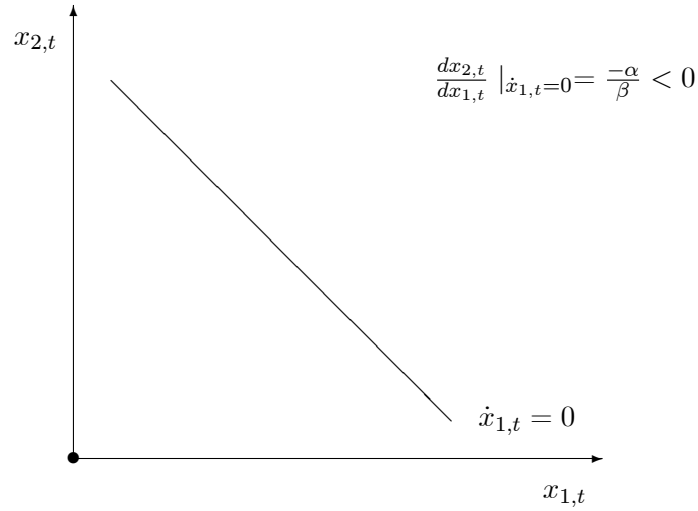
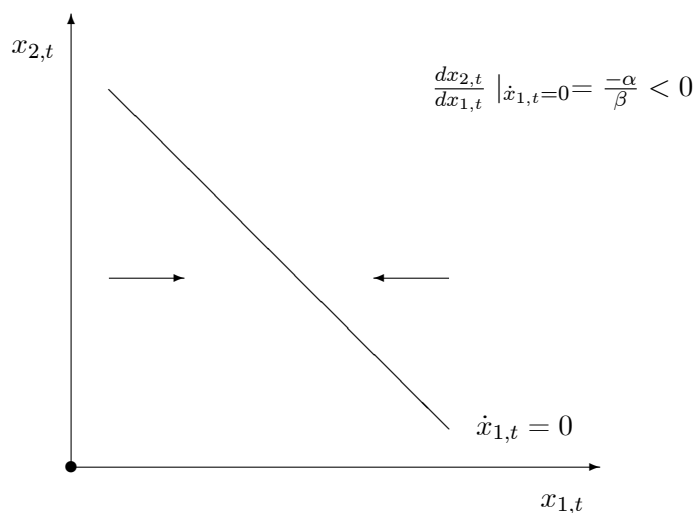


Figura 1.7. Condición de equilibrio dinámica parcial de $x_{1,t}$

La figura 1.7 muestra la condición de equilibrio dinámica parcial para la variable endógena 1, que como hemos visto anteriormente tiene pendiente negativa. Esta línea recta nos indica que la relación entre la variable $x_{1,t}$ y $x_{2,t}$ tiene que ser negativa para que $x_{1,t}$ permanezca constante en el tiempo. Esto no significa que la relación entre ambas variables sea negativa.

Figura 1.8. Diagrama de flujos de la variable $x_{1,t}$

Otra información que vamos a representar gráficamente, usando unas flechitas, es el signo de la derivada respecto al tiempo de cada variable endógena en situación de desequilibrio. Tal y como veíamos en la figura anterior, todos los puntos situados en la línea recta con pendiente negativa implican que la derivada respecto al tiempo de la variable endógena 1 es cero, es decir, existe equilibrio parcial para esta variable. Obviamente, si estamos fuera de esta línea, significa que dicha derivada no es cero, por lo que puede ser positiva o negativa. Esta información nos va a ser muy útil, por cuanto nos va a permitir observar gráficamente los movimientos de dicha variable. Así, vemos como la condición de equilibrio dinámica parcial para la variable endógena 1 divide el espacio en dos áreas, una a la derecha y otra a la izquierda. En estas áreas, la ecuación diferencial tomará o bien valores positivos o bien valores negativos. En el caso de que nos situemos en un punto a la derecha de esta condición de equilibrio parcial, o bien $x_{1,t}$ es muy grande (respecto al valor que tendría que tener para que existiese equilibrio parcial) o bien $x_{2,t}$ es muy grande. Como podemos observar, ambas variables tienen signo negativo en la ecuación diferencial, por lo que esta tomaría signo negativo. Es decir, la derivada de $x_{1,t}$ respecto al tiempo es negativa, por lo que la variable $x_{1,t}$ disminuiría. Esto lo representamos con una flechita horizontal (dado que $x_{1,t}$ está representada en el eje de abscisas) hacia

la izquierda. A la izquierda de la condición de equilibrio parcial, el signo sería positivo, representado con una flechita hacia la derecha, tal y como aparece en la figura 1.8.

La figura 1.9 muestra la condición de equilibrio dinámica parcial para la variable endógena 2, que tiene pendiente positiva. Esta línea recta nos indica que la relación entre la variable $x_{1,t}$ y $x_{2,t}$ tiene que ser positiva para que $x_{2,t}$ permanezca constante en el tiempo. Así, para que la variable endógena 2 permanezca constante en el tiempo, si el valor de la variable endógena 2 es muy alto, el valor de la endógena 1 tiene que ser muy bajo.

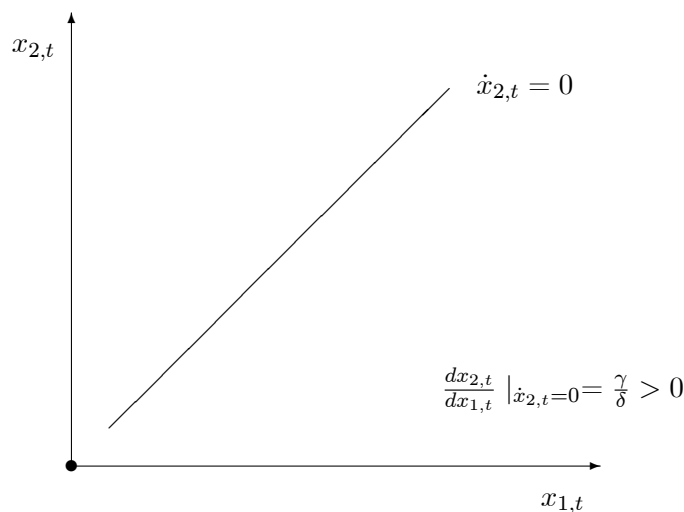


Figura 1.9. Condición de equilibrio dinámica parcial de $x_{2,t}$

En cualquier caso, hemos de tener en cuenta que estas representaciones gráficas no están indicando la relación que existe entre ambas variables endógenas. Así, la relación entre ambas variables endógenas puede ser positiva o negativa, independientemente de la relación que tengan en cada una de las ecuaciones dinámicas. Lo único que nos dicen estas representaciones gráficas es la relación entre ambas variables tal que exista equilibrio parcial, es decir, la combinación de valores de las variables endógenas tal que una de ellas permanezca constante en el tiempo.

Por su parte, la figura 1.10 muestra el diagrama de flujos de la variable $x_{2,t}$, que nos indica cómo se mueve dicha variable en

situación de desequilibrio. En este caso, las flechitas son verticales, dado que esta variable está representada en el eje de ordenadas. De nuevo tenemos dos zonas de desequilibrio. A la derecha de la condición de equilibrio parcial, o bien $x_{1,t}$ es muy grande (respecto al valor que tendría que tener para que $x_{2,t}$ estuviese en equilibrio) o bien $x_{2,t}$ es demasiado pequeño. La variable endógena 1 aparece en esta ecuación con signo positivo mientras que la endógena 2 aparece con signo negativo. Por tanto, esto significa que en esta zona la ecuación toma valores positivos, lo que representamos por una flechita ascendente. Por el contrario, en la zona situada a la izquierda de esta condición de equilibrio parcial, o bien la variable 1 es muy pequeña o bien la 2 es demasiado grande, por lo que la ecuación tomaría signo negativo, que representamos por una flechita descendente.

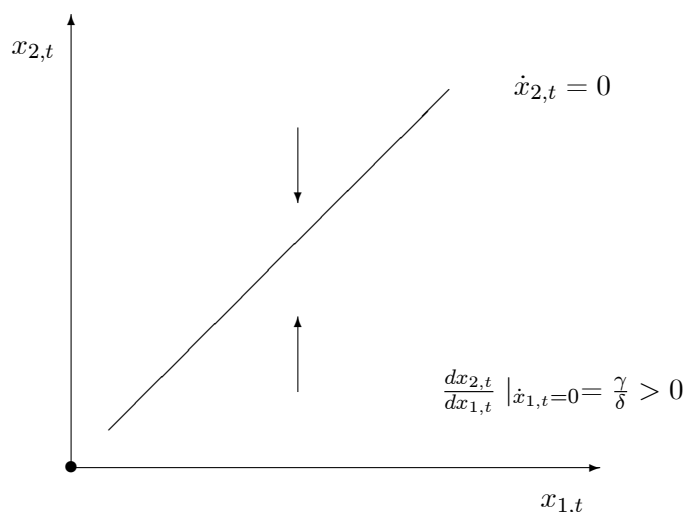


Figura 1.10. Diagrama de flujos de la variable $x_{2,t}$

Finalmente, la figura 1.11 muestra la representación de nuestro modelo, en la cual presentamos de forma conjunta las dos condiciones de equilibrio parcial, junto con el diagrama de flujos correspondiente al comportamiento de las variables en desequilibrio. Esta figura simplemente es la combinación de las figuras 1.8 y 1.10. El estado estacionario vendría dado por el punto donde ambas ecuaciones diferenciales son cero, EE_0 . Tal y como podemos observar, la figura

nos muestra la existencia de cuatro diferentes zonas de desequilibrio para las dos variables endógenas, las cuales muestran diferentes relaciones entre las mismas. Así, mientras que en determinadas zonas la relación entre ambas variables es positiva, en otras es negativa.

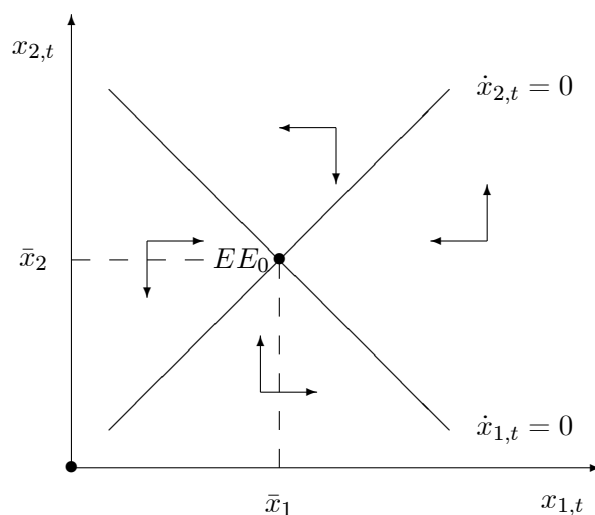


Figura 1.11. Representación del sistema dinámico

1.3.6 Análisis de perturbaciones

Una vez que hemos resuelto el modelo y tenemos una representación gráfica de la economía, el último paso consiste en darle utilidad al análisis anterior. Así, dicho análisis nos va a permitir estudiar el comportamiento de la economía ante diferentes tipos de perturbaciones. Este análisis va a consistir en calcular los efectos a lo largo del tiempo de un determinado cambio en alguna de las variables exógenas. De este modo, se trata de ver cómo van cambiando a lo largo del tiempo las variables endógenas cuando se produce una perturbación y cómo se comporta la economía ante dicha perturbación.

Para ello vamos a suponer que se produce una disminución en $z_{1,t}$. En principio, esta variable sólo aparece en la ecuación dinámica correspondiente a la variable 1, pero al alterarse su valor como consecuencia de la perturbación, también va a tener efectos sobre

la variable 2. Vamos a intentar ver qué ocurre en nuestra economía utilizando las ecuaciones dinámicas para ambas variables endógenas:

$$\dot{x}_{1,t} = -\alpha x_{1,t} - \beta x_{2,t} - z_{1,t} = 0, \quad (1.51)$$

$$\dot{x}_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} = 0. \quad (1.52)$$

Como podemos comprobar, inicialmente la disminución en $z_{1,t}$ va a provocar un aumento en $x_{1,t}$, ($\downarrow z_{1,t} \Rightarrow \uparrow x_{1,t}$). Esto es debido a que el coeficiente asociado a $z_{1,t}$ tiene un signo negativo, por lo que una disminución en su valor hace que la derivada respecto al tiempo de $x_{1,t}$ sea positiva, ($\dot{x}_{1,t} > 0$). A este efecto lo vamos a denominar efecto instantáneo o de corto plazo. Pero dado que $x_{1,t}$ aumenta, al siguiente periodo también va a aumentar $x_{2,t}$, dado que aparece en la ecuación correspondiente a esta variable con signo positivo, al tiempo que va a producir a su vez una disminución en ella misma, ($\uparrow x_{1,t} \Rightarrow \downarrow x_{1,t} \uparrow x_{2,t}$). A partir de este momento las cosas comienzan a ser más complicadas y es difícil averiguar el camino que siguen ambas variables. Lo podemos intentar, pero va a resultar prácticamente imposible. Así, tenemos que el aumento en $x_{1,t}$ provoca un aumento en $x_{2,t}$ pero resulta que si $\uparrow x_{2,t} \Rightarrow \downarrow x_{2,t} \downarrow x_{1,t}$. Esto es, se van a producir muchos efectos con sentido contrario.

Vamos a realizar el análisis en términos gráficos, para comprobar la utilidad de representar gráficamente el modelo y lo simple que resulta ahora seguir el comportamiento a lo largo del tiempo de las variables endógenas. La figura 1.12 muestra el punto de partida, que siempre va a ser el estado estacionario. Así, suponemos que la economía se encuentra situada en el punto EE_0 . En ese momento se produce la perturbación.

En nuestro análisis, lo primero que vamos a hacer es representar gráficamente el nuevo estado estacionario, que nos va a servir de referencia de hacia dónde va la economía y de cuáles son los efectos en el largo plazo de la perturbación. Por tanto, ya tenemos una definición de qué significa largo plazo: es aquel periodo de tiempo en el cual la economía se ha ajustado totalmente ante la perturbación y ha alcanzado el nuevo estado estacionario. Para representar el nuevo estado estacionario gráficamente, partimos de las condiciones de equilibrio dinámicas parciales y comprobamos cómo las constantes de las mismas se ven alteradas ante la perturbación. Obviamente, si la perturbación que se produce no forma parte de alguna de las

ecuaciones dinámicas de equilibrio parcial, la representación gráfica de la misma no se ve alterada dado que su constante no cambia.

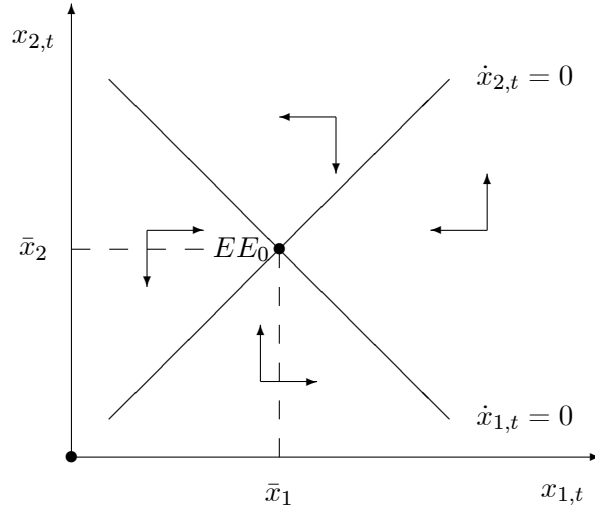


Figura 1.12. Estado estacionario inicial (previo a la perturbación)

Observando ambas ecuaciones nos damos cuenta que la variable endógena que se altera, $z_{1,t}$ únicamente aparece en la primera ecuación diferencial, por lo que su constante cambia. Para poder volver a representarla gráficamente, el valor de dicha ecuación tiene que ser cero de nuevo. Como el signo asociado a la variable exógena $z_{1,t}$ es negativo, esto significa que si dicha variable exógena disminuye, la ecuación diferencial correspondiente a la variable endógena 1 toma un valor positivo. Para que dicha ecuación vuelva a ser cero, o bien algo positivo tiene que disminuir o bien algo negativo tiene que aumentar. Como podemos comprobar el signo asociado a la variable $x_{1,t}$ es negativo, por lo que dicha variable tiene que aumentar para que la ecuación vuelva a ser cero. Eso significa que para cada valor de la variable $x_{2,t}$ la variable $x_{1,t}$ tiene que ser mayor. Por tanto, tenemos que representar esta condición de equilibrio parcial a la derecha de la existente con anterioridad, tal y como muestra la figura 1.13. Como podemos observar el nuevo estado estacionario está a la derecha y hacia arriba del anterior, lo que significa que a largo plazo, tanto la variable $x_{1,t}$ como la variable $x_{2,t}$ aumentan.

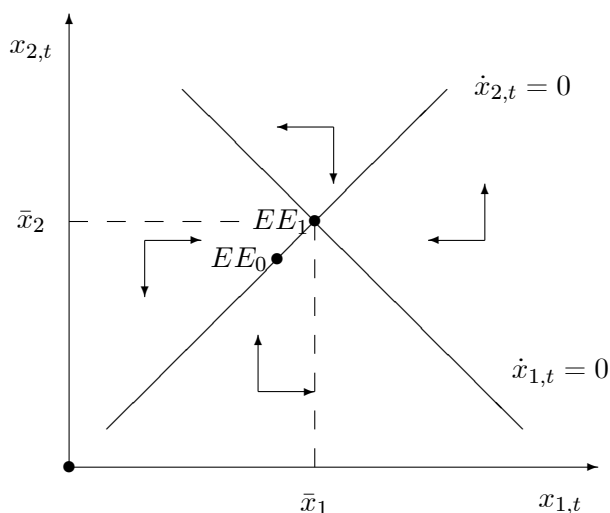


Figura 1.13. Nuevo estado estacionario (una vez producida la perturbación)

La figura 1.14, muestra la dinámica de la economía, desde el estado estacionario inicial, EE_0 , hasta que alcanza el nuevo estado estacionario EE_1 . Como podemos comprobar, cuando la economía sufre la perturbación, es decir, el cambio en una variable exógena, la situación en la que se encuentra deja de ser de equilibrio, pasando a ser una situación de desequilibrio. En concreto, observamos en la figura 1.14 que mientras sigue existiendo equilibrio parcial en términos de la variable endógena 2 (estamos situados en su línea de equilibrio dinámica parcial) se produce un desequilibrio en términos de la variable endógena 1, situándonos a la izquierda de su condición de equilibrio dinámica parcial. Observando el diagrama de flujos vemos que las flechitas correspondientes a esta variable se mueven hacia la derecha, indicando que esta variable aumenta, por lo que pasaríamos a la zona de desequilibrio que está situada en la parte inferior. En esta zona de desequilibrio, el diagrama de flujos nos indica que mientras que la variable 1 está aumentando, también lo hace la variable 2, por lo que la economía estaría desplazándose hacia la derecha y hacia arriba.

Este movimiento nos llevaría a alcanzar la condición de equilibrio dinámica parcial para la variable 1, por lo que esta se haría constante en dicho momento, pero estaríamos a la derecha de la condición

de equilibrio dinámica parcial para la variable 2, por lo que ésta aumentaría. Esto nos llevaría la zona de desequilibrio situada a la derecha, en la cual mientras que la variable 2 aumenta, la variable 1 disminuye, moviéndonos hacia arriba a la izquierda. De nuevo alcanzaríamos la condición de equilibrio dinámica parcial para la variable endógena 2, pero ahora en un punto situado a la derecha de la condición de equilibrio dinámica para la variable 1, por lo que esta disminuiría, pasando a la zona de desequilibrio situada arriba, en la cual ambas variables disminuyen, moviéndonos hacia abajo a la izquierda. De nuevo alcanzaríamos la condición de equilibrio parcial para la variable 1, pero ahora en un punto a la izquierda de la condición de equilibrio dinámica parcial para la variable 2, por lo que pasaríamos a la zona situada a la izquierda, donde mientras que la variable 2 disminuye la 1 aumenta, desplazándonos hacia abajo a la derecha. Este proceso se repetiría hasta que alcanzásemos el nuevo estado estacionario, EE_1 .

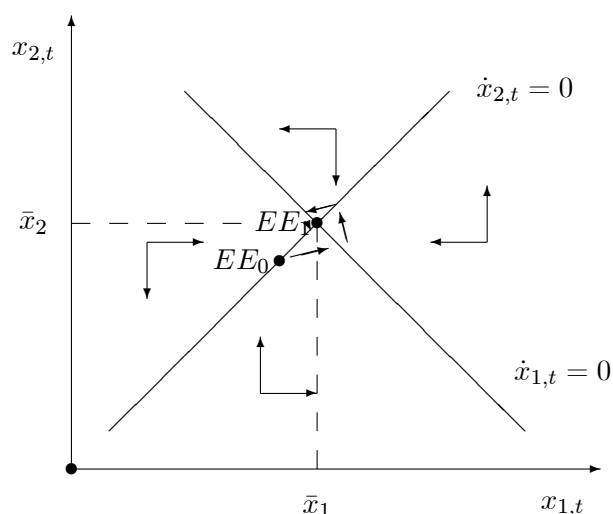


Figura 1.14. Dinámica de la economía ante la perturbación

1.3.7 Las funciones impulso-respuesta

Otra forma alternativa y más habitual de representar los efectos de una perturbación es a través de las denominadas funciones impulso-respuesta. Las funciones impulso-respuesta suponen una

representación gráfica respecto al tiempo de la desviación de cada variable respecto a su estado estacionario inicial una vez que se produce una determinada perturbación. De este modo podemos observar los efectos dinámicos de la perturbación sobre cada una de las variables del modelo a lo largo del tiempo. Para ello, únicamente tenemos que construir, a partir del análisis realizado anteriormente, la senda que ha seguido a lo largo del tiempo cada una de las variables endógenas. Así, por ejemplo, de la figura 1.14 podemos deducir el comportamiento a lo largo del tiempo de la variable endógena 1. Así, esta variable en primer lugar aumenta, para posteriormente disminuir y a continuación volver a aumentar. En el caso de la variable endógena 2, esta variable aumenta en primer lugar, para disminuir a continuación, volviendo a aumentar para posteriormente disminuir, etc. No obstante, dichos movimientos no están sincronizados, existiendo situaciones en las cuales las dos variables se mueven en la misma dirección mientras que en otros momentos del tiempo se mueven en dirección contraria. Este tipo de análisis lo veremos en mayor profundidad en el manual MAC, cuando resolvamos computacionalmente este tipo de sistemas.

2

Modelos dinámicos básicos

- 2.1. Introducción
- 2.2. Ejercicio 1: El modelo más simple jamás visto
- 2.3. Ejercicio 2: La economía en términos reales
- 2.4. Ejercicio 3: La política monetaria
- 2.5. Ejercicio 4: El desbordamiento del tipo de cambio
- 2.6. Ejercicio 5: Perturbaciones anticipadas
- 2.7. Ejercicio 6: Política monetaria restrictiva

2.1 Introducción

En este tema vamos a aplicar los instrumentos de análisis dinámico que hemos repasado en el tema anterior a una serie de modelos macroeconómicos dinámicos simples, con el objetivo de estudiar los efectos a lo largo del tiempo de una perturbación sobre las distintas variables macroeconómicas. Estos modelos tienen un limitado

interés en sí mismos, pero constituyen ejemplos muy ilustrativos de los principales conceptos que vamos a usar en otros modelos más complejos, al tiempo que suponen una herramienta muy útil para conocer algunos aspectos del comportamiento dinámico de las variables macroeconómicas ante distintas perturbaciones. De este modo, el objetivo fundamental de este tema no es el de aprender estos modelos teóricos, sino el introducirnos en el análisis dinámico a través del conocimiento de uno de los instrumentos que se usan en la macroeconomía dinámica, como es el diagrama de flujos. En total, vamos a resolver seis ejercicios que presentan diferentes aspectos interesantes del comportamiento de una economía.

2.2 Ejercicio 1: El modelo más simple jamás visto

Vamos a comenzar con el modelo macroeconómico más simple que nos podamos imaginar. Obviamente podemos pensar en estructuras aún más simples, pero en este caso obtendríamos un poder explicativo de la realidad muy limitado. Se trata de un modelo en el cual sólo existen dos mercados: el mercado de dinero y el mercado de bienes y servicios.

La estructura de la economía viene determinada por las siguientes ecuaciones:

$$m_t - p_t = \psi y_t - \theta i_t \quad (2.1)$$

$$y_t^d = \beta_0 - \beta_1(i_t - \dot{p}_t^e) \quad (2.2)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_t = v(y_t^d - y_t) \quad (2.4)$$

donde m es el logaritmo de la cantidad de dinero, p el logaritmo del nivel de precios, y^d el logaritmo del nivel de demanda, y el logaritmo del nivel de producción, $\bar{y}$ el logaritmo del nivel de producción potencial e i el tipo de interés nominal.

Todos los parámetros se definen en términos positivos. El parámetro ψ representa la elasticidad de los saldos reales respecto al nivel de producción. θ es la semi-elasticidad de la demanda de

dinero respecto al tipo de interés nominal. Es una semi-elasticidad porque todas las variables del modelo vienen definidas en términos logarítmicos, excepto el tipo de interés, que al ser un porcentaje no le podemos aplicar logaritmos, ya que es como si estuviese en dicho término. El parámetro β_1 representa la elasticidad del nivel de demanda agregada respecto al tipo de interés real, mientras que β_0 es el componente autónomo de la demanda agregada, que vamos a suponer que refleja el gasto público. El parámetro μ nos indica la velocidad de ajuste de los precios ante diferencias entre el nivel de producción y el nivel de producción potencial. Por último el parámetro v nos indica la velocidad de ajuste del nivel de producción ante diferencias entre el nivel de demanda agregada y el nivel de producción de la economía.

Tal y como lo hemos definido anteriormente, un punto sobre una variable indica variación con respecto al tiempo. De este modo, $\dot{p}_t$ nos indicaría la derivada del nivel de precios respecto al tiempo (lo que llamamos inflación), mientras que $\dot{y}_t$ nos indicaría la derivada respecto al tiempo del nivel de producción (lo que denominamos crecimiento económico).

La ecuación (2.1) es la condición de equilibrio en el mercado de dinero, o lo que es equivalente, la demanda de dinero, donde los saldos reales, $m_t - p_t$ (recordemos que las variables vienen definidas en términos logarítmicos), dependen positivamente del nivel de producción y negativamente del tipo de interés nominal. La ecuación (2.2) representa la demanda agregada de la economía, que depende positivamente del gasto público (o del componente autónomo de la misma) y negativamente del tipo de interés real. El tipo de interés real viene representado por la ecuación de Fischer y se obtiene como la diferencia entre el tipo de interés nominal y la tasa de inflación esperada.

En principio, podríamos pensar que se trata de una versión dinámica del modelo IS-LM, pero presenta importantes diferencias. Así, el modelo IS-LM es un modelo estático, donde los precios son constantes. Esto no es así en el modelo que estamos presentando, donde la dinámica de los precios, es decir, su variabilidad a lo largo del tiempo, juega un papel fundamental. Por otra parte, la demanda agregada es una función de las expectativas de inflación, expectativas que tampoco están presentes en el modelo IS-LM lo cual supone una importante limitación del mismo. Estos dos elementos, junto con

la consideración del tiempo, hace que este modelo, a pesar de su simplicidad, sea infinitamente más poderoso que el modelo IS-LM a la hora de explicar el comportamiento de una economía.

Al margen de las dos ecuaciones de equilibrio para los dos mercados considerados, el modelo también está compuesto por dos ecuaciones dinámicas que nos indican el comportamiento de dos variables endógenas (nivel de precios y nivel de producción) ante situaciones de desequilibrio. Así la ecuación (2.3) nos indica cómo se mueven los precios en el tiempo en función de las diferencias entre el nivel de producción y el nivel de producción potencial. Si el nivel de producción es mayor al potencial, entonces dicha ecuación es positiva, por lo que los precios aumentan (inflación positiva). Por el contrario, si el nivel de producción es inferior al potencial, la ecuación tendría signo negativo, indicando que los precios disminuirían. Finalmente, la ecuación (2.4) es similar, mostrando la dinámica del nivel de producción. Así, esta expresión nos indica cómo se mueve el nivel de producción de la economía (la tasa de crecimiento de la economía) ante diferencias entre la oferta y la demanda agregada. Si el nivel de demanda agregada es superior al nivel de producción, la expresión tomaría un valor positivo, indicando que el nivel de producción aumenta. Por el contrario, si el nivel de producción es superior a la demanda, entonces la expresión tomaría un valor negativo, por lo que disminuiría el nivel de producción de la economía.

Para resolver este tipo de modelos y poder utilizarlo para analizar el funcionamiento de la economía, vamos a especificar los pasos que tenemos que llevar a cabo. Estos pasos a seguir son los siguientes:

1. Definición de variables endógenas y exógenas.
2. Definir las variables endógenas de referencia
3. Obtención de las ecuaciones diferenciales.
4. Modelo en notación matricial.
5. Valor de las variables en estado estacionario.
6. Análisis de estabilidad.
7. Representación gráfica de las condiciones de equilibrio dinámicas.

8. Diagrama de flujos.
9. Senda estable.
10. Análisis de perturbaciones.

Vamos ahora a realizar detenidamente estos 10 pasos aplicándolos al modelo presentado anteriormente. Tal y como veremos, algunos de ellos, como el punto 6 referente al análisis de estabilidad o el punto 9 correspondiente a la senda estable, no siempre es necesario realizarlos.

Paso 1: Variables endógenas y exógenas. El primer paso que tenemos que dar es la identificación de las variables que componen el modelo, en términos de si se trata de variables endógenas, cuyo valor hay que calcular, o bien de variables exógenas, cuyo valor viene predeterminado. El modelo tiene un total de siete variables que son las siguientes:

1. Cantidad de dinero
2. Precios
3. Nivel de producción potencial
4. Tipo de interés nominal
5. Nivel de demanda
6. Nivel de producción
7. Nivel de demanda autónoma

Tal y como podemos comprobar tenemos un total de 4 variables endógenas: precios, tipo de interés nominal, nivel de demanda y nivel de producción, y un total de 3 variables exógenas: cantidad de dinero, nivel de producción potencial y nivel de demanda autónoma, que representa fundamentalmente el gasto público. Por este motivo a este parámetro lo consideramos como una variable exógena, que nos va a permitir analizar los efectos de una alteración en el gasto público. Dado que tenemos 4 variables endógenas y 4 ecuaciones,

el sistema está identificado, por lo que podemos continuar con el proceso de resolución.

Paso 2: Variables endógenas de referencia. En segundo lugar, hemos de seleccionar las variables endógenas en términos de las cuales vamos a resolver nuestro modelo. Tal y como hemos apuntado anteriormente, vamos a resolver los modelos únicamente en términos de dos variables endógenas, con objeto de poder hacer la representación gráfica del mismo. ¿Quiere decir esto que podemos simplificar nuestro modelo a uno con sólo dos variables endógenas? La respuesta es no. Esto no supone ninguna simplificación. Lo único que hacemos es calcular el valor de las otras variables endógenas en términos de las variables endógenas de referencia y de las variables exógenas y las sustituimos por dicho valor. De este modo ya no aparecen en nuestro modelo, apareciendo únicamente las variables endógenas de referencia y las variables endógenas. No obstante, podemos calcularlas en cualquier momento, una vez que calculamos el valor de las endógenas de referencia.

La idea es muy simple. Imaginemos que tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$3x_1 + 10 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Este sistema puede ser simplificado, por ejemplo, despejando la variable x_3 de la tercera ecuación y sustituyendo su valor en las dos anteriores. Así, obtenemos que:

$$x_3 = x_1 - x_2$$

Sustituyendo el valor de x_3 en el sistema anterior obtenemos el siguiente sistema:

$$3x_1 + 10 + 2x_2 - x_1 + x_2 = 2x_1 + 10 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 5x_1 - 5x_2 = 6x_1 - 4x_2 = 0$$

y ya hemos reducido nuestro sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas porque hemos resuelto para una de ellas. Para recuperar el valor de x_3 a partir de las expresiones anteriores, únicamente tenemos que calcular x_1 y x_2 .

Volviendo a nuestro modelo, normalmente nos van a indicar cuáles son las variables endógenas de referencia, que serán aquellas para las que tengamos definido su comportamiento dinámico o alguna otra variable que contenga a las mismas. En nuestro caso, las variables endógenas de referencia, en términos de las cuales vamos a representar gráficamente nuestra economía, van a ser el nivel de precios y el nivel de producción.

Paso 3: Ecuaciones diferenciales. El siguiente paso consiste en obtener las dos ecuaciones que definen el comportamiento de las variables endógenas de referencia en función de ellas mismas y de las variables exógenas. Es decir, tenemos que calcular los valores para las variables endógenas que dejamos fuera (tenemos que resolver para las mismas). Estas variables endógenas, para las cuales tenemos que resolver, son el tipo de interés nominal y el nivel de demanda agregada. Para ello utilizamos las expresiones (2.1) y (2.2). Para obtener el tipo de interés nominal, despejamos en la ecuación (2.1):

$$i_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi y_t) \quad (2.5)$$

Ya tenemos el valor del tipo de interés nominal en función de las variables endógenas de referencia (precios y producción) y de las variables exógenas (cantidad de dinero). Por tanto, ya hemos resuelto para el tipo de interés nominal.

A continuación, vamos a resolver para el nivel de demanda agregada. Tal y como podemos comprobar en la ecuación (2.2), la demanda agregada depende del tipo de interés nominal. Como éste ya lo tenemos calculado, lo que hacemos es sustituir (2.5) en (2.2), de forma que obtenemos:

$$y_t^d = \beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) + \beta_1 \dot{p}_t^e \quad (2.6)$$

La expresión anterior no es una solución, dado que aún no podemos conocer el valor de la demanda agregada. En efecto, en la parte derecha de la ecuación aparece un término que, a priori,

es desconocido. Se trata de las expectativas de inflación en el futuro. Este término aparece como consecuencia del cálculo del tipo de interés real. El tipo de interés real es una variable no conocida, dado que depende de la inflación que existirá al final del periodo de maduración al que esté referido el tipo de interés nominal correspondiente. Esto quiere decir que la demanda agregada tampoco es conocida excepto en términos esperados, ya que va a depender de las expectativas de inflación.

Por tanto, tenemos que resolver el término de expectativas, que en nuestro contexto va a ser muy sencillo. Para resolver las expectativas suponemos que estas son racionales. Eso quiere decir que la esperanza matemática de la inflación es igual a la inflación más un ruido blanco. Por otra parte, vamos a suponer que no existe incertidumbre, por lo que estaríamos en un contexto de previsión perfecta. Esto quiere decir que el ruido blanco, el término de error, de las expectativas racionales siempre es cero, por lo que el valor esperado de una variable en el futuro es el valor actual. En este caso la inflación esperada es simplemente la inflación actual ($\dot{p}_t = \dot{p}_t^e$). Por tanto, la ecuación que determina la demanda agregada de la economía sería:

$$y_t^d = \beta_0 - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) + \beta_1 \dot{p}_t \quad (2.7)$$

Hemos de señalar que aunque las expectativas no aparezcan en nuestro sistema de ecuaciones, siguen existiendo. Más adelante quedará claro a que nos referimos exactamente.

Para obtener las dos ecuaciones dinámicas que van a determinar el comportamiento de nuestra economía, tenemos que sustituir en las ecuaciones de ajuste de las variables endógenas de referencia (nivel de precios y nivel de producción) el resto de variables endógenas, esto es el tipo de interés y el nivel de demanda agregada, que hemos obtenido anteriormente. En el caso de la ecuación dinámica para el nivel de precios, no aparecen dichas variables, por lo que esta primera ecuación es exactamente igual a la que proporciona el modelo:

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.8)$$

A continuación, obtenemos la ecuación dinámica para el nivel de producción. Para ello sustituimos el valor obtenido para la demanda agregada en la ecuación dinámica del nivel de producción:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) + \beta_1 \dot{p}_t \right] \quad (2.9)$$

Como podemos observar, en la ecuación anterior aparece la inflación, es decir, la derivada respecto al tiempo de los precios. El valor de la inflación viene dado por la ecuación de ajuste de los precios. Por tanto, tenemos que sustituir la ecuación (2.3) en la expresión anterior, obteniendo

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 - \left(\frac{\beta_1 \psi}{\theta} + 1 \right) y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) + \beta_1 \mu (y_t - \bar{y}_t) \right] \quad (2.10)$$

Operando para agrupar términos y calcular el parámetro asociado a cada una de las variables endógenas de referencia y a las variables exógenas resulta:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + \left(\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1 \right) y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) - \beta_1 \mu \bar{y}_t \right] \quad (2.11)$$

Paso 4: Modelo en notación matricial. El paso 4 es trivial pero va a ser de gran utilidad. Consiste simplemente en escribir nuestro sistema de ecuaciones en notación matricial. Del paso 3, tenemos que nuestra economía viene definida por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{p}_t = \mu (y_t - \bar{y}_t) \quad (2.12)$$

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + \left(\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1 \right) y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) - \beta_1 \mu \bar{y}_t \right] \quad (2.13)$$

En notación matricial tendríamos por tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \frac{-v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & -v\beta_1 \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

lo que nos permite identificar las matrices A y B y el vector de variables exógenas.

Paso 5: Valor de las variables en estado estacionario. El Estado Estacionario viene definido por aquella situación en la cual todas las variables son constantes, es decir, las derivadas con respecto al tiempo de las variables endógenas es cero. El vector de variables endógenas en estado estacionario lo calculamos como:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \quad (2.15)$$

Por tanto, para calcular el valor de las variables en Estado Estacionario, invertimos la matriz A , la multiplicamos por -1, multiplicamos por la matriz B y multiplicamos por el vector de variables exógenas, es decir:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = - \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \frac{-v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & -v\beta_1\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \frac{-v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & -v\beta_1\mu \end{bmatrix}$$

$$z_t = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Comenzamos invirtiendo la matriz A . Para ello, en primer lugar calculamos la adjunta de la matriz A , siendo:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) & \frac{-v\beta_1}{\theta} \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

Su traspuesta es:

$$adj(A)' = \begin{bmatrix} v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

siendo su determinante:

$$|A| = \frac{v\beta_1\mu}{\theta}$$

por lo que el negativo de la inversa de A es:

$$-A^{-1} = -\frac{\theta}{v\beta_1\mu} \begin{bmatrix} v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$-A^{-1} = \begin{bmatrix} -\theta - \frac{\psi}{\mu} - \frac{\theta}{\beta_1\mu} & \frac{\theta}{v\beta_1} \\ -\frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = \begin{bmatrix} -\theta - \frac{\psi}{\mu} - \frac{\theta}{\beta_1\mu} & \frac{\theta}{v\beta_1} \\ -\frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ v & \frac{v\beta_1}{\theta} & -v\beta_1\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

y multiplicando las matrices $-A^{-1}B$ se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t = \begin{bmatrix} \frac{\theta}{\beta_1} & 1 & -\psi - \frac{\theta}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos los valores de las variables en estado estacionario:

$$\bar{p}_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + m_t - (\psi + \frac{\theta}{\beta_1})\bar{y}_t$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_t$$

Paso 6: Análisis de estabilidad. A continuación, vamos a realizar el análisis de estabilidad para conocer las propiedades dinámicas que nuestro modelo en relación al comportamiento de la economía en situación de desequilibrio. Para ello igualamos a cero el determinante de la matriz A menos λ por la matriz identidad:

$$Det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & \mu \\ \frac{-v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

Operando obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 - \lambda \left[v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) \right] + \frac{v\beta_1\mu}{\theta} = 0 \quad (2.17)$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que las raíces son:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) \pm \sqrt{\left[v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) \right]^2 - \frac{4v\beta_1\mu}{\theta}}}{2} \quad (2.18)$$

Tal y como podemos observar el signo dentro de la raíz cuadrada es negativo, por lo que al resolver esta raíz cuadrada lo que queda es menor que el primer término. Si $v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) > 0$ entonces tenemos que el primer término es positivo. Positivo más algo más pequeño, positivo. Positivo menos algo más pequeño, positivo. Por tanto en este caso ambas raíces serían positivas. Si $v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) < 0$ entonces tenemos que el primer término es negativo. Negativo más algo más pequeño, negativo. Negativo menos algo más pequeño, negativo. Por tanto en este caso ambas raíces serían negativas. Por tanto, obtenemos que si $\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1 > 0 \implies \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Por el contrario, si $\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1 < 0 \implies \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Esto significa que únicamente sería posible el segundo caso, lo que implicaría que $\beta_1\mu < \frac{\beta_1\psi}{\theta} + 1$, por lo que existiría estabilidad global, es decir, todas las trayectorias nos conducirían al estado estacionario

Paso 7: Representación gráfica. A continuación, representamos gráficamente las dos condiciones de equilibrio dinámicas, o más exactamente, aquella solución para la cual las ecuaciones valen cero. Dado que las ecuaciones diferenciales son lineales lo único que tenemos que hacer es calcular su pendiente. Para ello lo que hacemos es igualar a cero cada ecuación (equilibrio dinámico parcial) y despejar la variable que colocamos en el eje vertical en función de la variable que colocamos en el eje horizontal. Vamos a representar al nivel de precios en el eje vertical, mientras que en el eje horizontal vamos a representar al nivel de producción. Por tanto, despejaríamos el nivel de precios en términos del nivel de producción en cada ecuación. Así por ejemplo, respecto a la primera ecuación tenemos:

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) = 0$$

Despejando el nivel de precios obtenemos:

$$0p_t = \mu y_t - \mu \bar{y}_t$$

$$p_t = \frac{\mu}{0} y_t - \frac{\mu}{0} \bar{y}_t$$

Por tanto, la pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de precios), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, es:

$$\frac{dp_t}{dy_t} \big|_{\dot{p}_t=0} = \frac{\mu}{0} = \infty$$

Por tanto, la presentación gráfica de la condición de equilibrio parcial para el nivel de precios es una línea vertical (figura 2.1). Esto significa que para que exista equilibrio parcial del nivel de precios, es decir, para que los precios sean constantes, lo único que se requiere es que el nivel de producción sea igual a su nivel potencial, sin importar el nivel de precios de la economía.

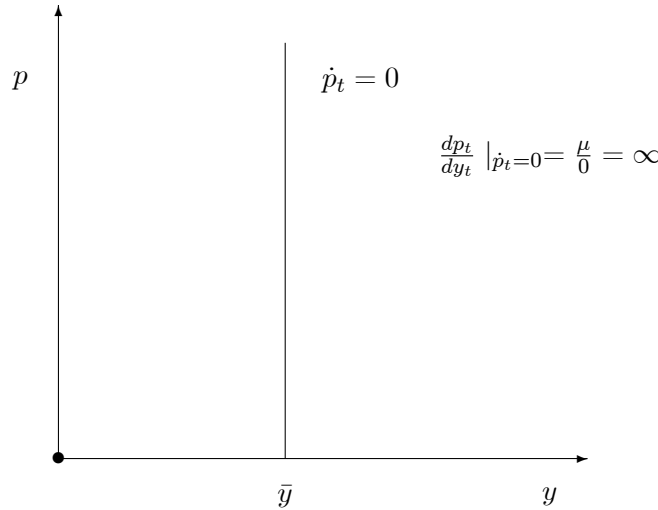


Figura 2.1: Condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de precios

A continuación, representamos gráficamente el comportamiento del nivel de precios en situación de desequilibrio. Tal y como

podemos observar a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, el nivel de producción es superior al potencial, por lo que esta ecuación sería positiva, indicando que los precios aumentan. Por el contrario, a la izquierda el nivel de producción es inferior al potencial, por lo que los precios disminuirían. Estos movimientos están representados por flechitas verticales, tal y como parecen en la figura 2.2.

En efecto, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica el nivel de producción de la economía es superior a su nivel potencial, por lo que las empresas estarían produciendo por encima de su capacidad productiva, lo que se traduciría en tensiones inflacionistas. Por el contrario, a la izquierda de esta condición de equilibrio dinámica, el nivel de producción es inferior al potencial, es decir, las empresas están produciendo por debajo de su capacidad productiva, lo que se traduciría en disminuciones en los precios, tal y como viene descrito por la ecuación (2.3).

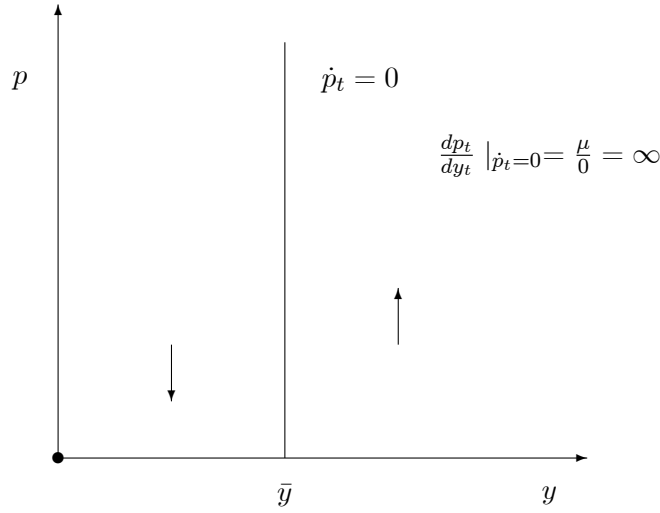


Figura 2.2: Comportamiento del nivel de precios en desequilibrio

Con respecto a la segunda ecuación tendríamos:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + \left(\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1 \right) y_t + \frac{\beta_1}{\theta} (m_t - p_t) - \beta_1 \mu \bar{y}_t \right] = 0 \quad (2.19)$$

De nuevo, despejando el nivel de precios obtenemos:

$$p_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + \frac{(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1)}{\frac{\beta_1}{\theta}}y_t + m_t - \theta\mu\bar{y}_t$$

Por tanto, únicamente tendríamos que derivar el nivel de precios respecto al nivel de producción, por lo que la pendiente, al igual que en el caso anterior, sería igual al coeficiente que multiplica al nivel de producción. Así, la pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, sería:

$$\frac{dp_t}{dy_t} \big|_{\dot{y}_t=0} = \frac{\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1}{\frac{\beta_1}{\theta}} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad (2.20)$$

siendo negativa, dado que por el análisis de estabilidad sabemos que el numerador de esta expresión es negativo.

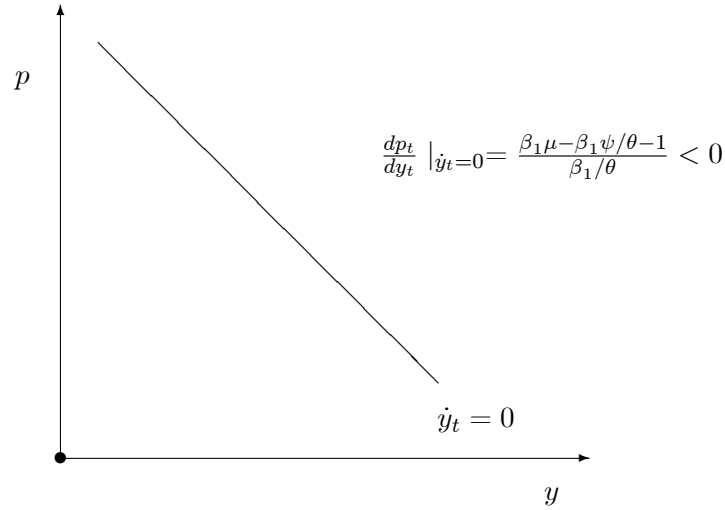


Figura 2.3: Condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción

La representación gráfica de la condición de equilibrio parcial para el nivel de producción tiene pendiente negativa, indicando que para

que el nivel de producción permanezca constante se requiere que si los precios son muy altos el nivel de producción sea muy bajo, mientras que si el nivel de precios es muy bajo, el nivel de producción debería ser muy alto (figura 2.3).

De nuevo, calculamos el comportamiento de esta variable en situación de desequilibrio. Así, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, dado un nivel de producción, los precios son muy elevados. Dado que el nivel de precios aparece en esta ecuación con signo negativo, esto quiere decir que dicha ecuación sería negativa, por lo que disminuiría el nivel de producción. Por el contrario, a la izquierda, dado un nivel de producción los precios serían muy bajos, por lo que aumentaría el nivel de producción. En términos de desequilibrio entre la oferta y la demanda agregada, los puntos situados a la derecha de esta condición de equilibrio dinámico se corresponden con situaciones de exceso de oferta, mientras que los puntos situados a la izquierda reflejan situaciones de exceso de demanda.

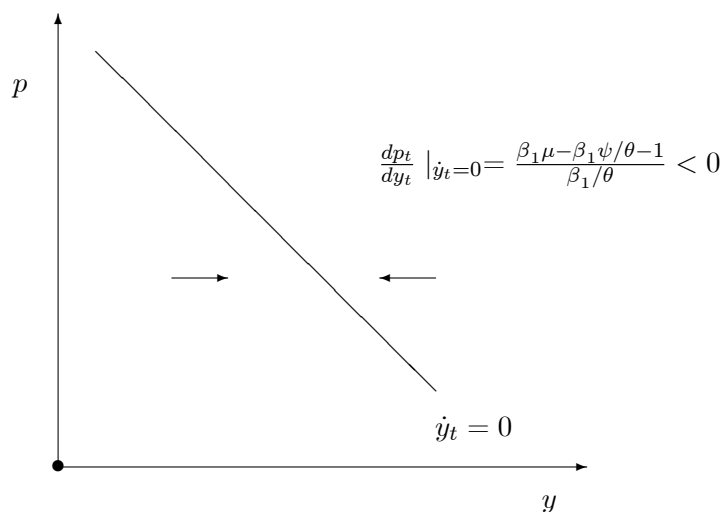


Figura 2.4: Comportamiento del nivel de producción en desequilibrio

Una vez representadas las dos ecuaciones diferenciales de forma separada procedemos a representarlas conjuntamente, obteniendo la representación de la economía dada por el modelo. A esta

representación gráfica la denominados diagrama de flujos, puesto que nos permite observar la dinámica de las variables endógenas en cualquier punto del espacio. Como podemos observar, esta figura nos permite analizar el comportamiento de los precios y del nivel de producción, que son nuestras variables endógenas de referencia. Sin embargo, no nos da ninguna información acerca del comportamiento de las otras variables endógenas.

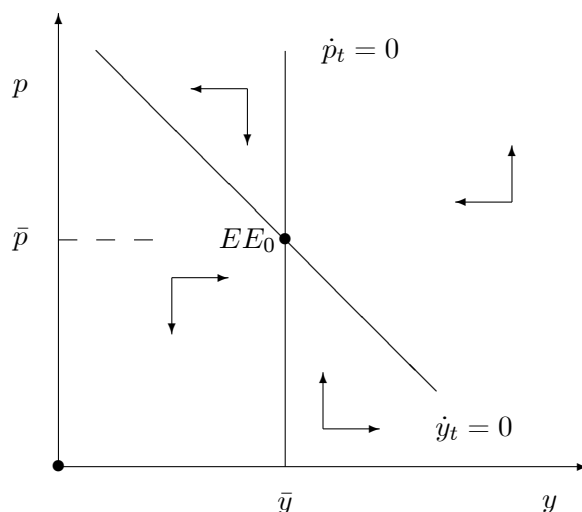


Figura 2.5: Diagrama de flujos de la economía en términos de precios y nivel de producción

Como podemos observar, las condiciones de equilibrio dinámicas parciales nos dividen el espacio en cuatro zonas diferentes. La relación entre ambas variables en cada zona viene dada por el diagrama de flujos. Tal y como podemos comprobar, en dos zonas la relación entre ambas variables es positiva, mientras que en las otras dos, la relación es negativa. Esto nos indica que la relación entre las variables macroeconómicas va a depender del tipo de desequilibrio que exista en la economía. El Estado Estacionario vendría dado por el punto donde se cruzan ambas condiciones de equilibrio dinámicas parciales, (EE_0) . En este punto ambas ecuaciones son cero, por lo que tanto el nivel de producción como el nivel de precios son constantes. Esto también implica que tanto el tipo de interés como el nivel de demanda agregada también permanezcan constantes en

este punto. Por otra parte, el diagrama de flujos nos indica que la economía se movería en sentido contrario a las agujas del reloj, pasando de una zona de desequilibrio a otra, indicando la existencia de una trayectoria de la economía asintótica respecto al Estado Estacionario.

Paso 9: Senda Estable: La senda estable es una ecuación adicional al modelo, que nos indica el camino "más rápido" hacia el Estado Estacionario. Dicha ecuación representa las trayectorias de las variables asociadas a la raíz negativa, que son las que trayectorias estables. En nuestro caso, únicamente vamos a utilizar la senda estable en términos gráficos, indicándonos las zonas de desequilibrio en las cuales existirían trayectorias que nos llevaría al Estado Estacionario. Este instrumento gráfico no lo vamos a utilizar por ahora, dado que únicamente existe en el caso en que tengamos una solución del tipo punto de silla, es decir, que existan tanto trayectorias convergentes como divergentes.

Paso 10: Análisis de perturbaciones: Una vez resuelto el modelo, el último paso consiste en su utilización para el análisis dinámico de perturbaciones. De hecho, este es el objetivo final que perseguimos al resolver este tipo de modelos, el analizar los efectos a lo largo del tiempo de distintas perturbaciones que afectan a la economía. Para ello partimos de una situación de Estado Estacionario, tal y como aparece en la figura 2.5, (EE_0) .

Vamos a suponer que se produce un aumento en la cantidad de dinero. Dicho análisis lo vamos a realizar casi exclusivamente en términos gráficos. Lo primero que tenemos que hacer es determinar el nuevo Estado Estacionario, si es que éste se ve alterado. Para ello tenemos dos opciones: o bien lo hacemos en términos gráficos representando las nuevas condiciones de equilibrio dinámicas parciales, o bien calculamos el cambio en las variables de estado estacionario respecto a la perturbación que se produce.

Para llevar a cabo el primer método tenemos que ver en qué ecuación aparece la cantidad de dinero como variable exógena, ya que si aparece en una de las ecuaciones diferenciales esto significaría que su constante variaría, por lo que también cambiaría su representación gráfica. Recordemos que nuestras condiciones de equilibrio dinámicas parciales son:

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.21)$$

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + (\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1)y_t + \frac{\beta_1}{\theta}(m_t - p_t) - \beta_1 \bar{y}_t \right] \quad (2.22)$$

Como podemos observar, la cantidad de dinero aparece únicamente en la ecuación dinámica del nivel de producción. Esto significa que la condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de precios no se ve alterada, ya que su constante, $-\mu \bar{y}_t$, no cambia. Por tanto, la representación gráfica de esta ecuación sigue siendo la misma y no se ve afectada por esta perturbación.

La que si cambia es la representación gráfica de la condición dinámica de equilibrio parcial del nivel de producción. En efecto, el aumento en la cantidad de dinero hace que esta ecuación tome un valor positivo, dado que el coeficiente asociado a la cantidad de dinero es positivo. Para poder representar de nuevo esta condición dinámica de equilibrio parcial, su valor tiene que volver a cero. Esto significa que bien algo positivo tiene que disminuir o bien que algo negativo tiene que aumentar, dentro de esta ecuación. Si nos centramos en la variable precios, observamos que su coeficiente es negativo. Esto significa que para que esta ecuación vuelva a ser cero, el nivel de precios tiene que ser mayor que el que existía anteriormente, es decir, ahora para un determinado nivel de producción el nivel de precios que hace que la producción permanezca constante tiene que ser mayor.

Por tanto, ahora tenemos que dibujar la condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción a la derecha de la anterior, tal y como aparece en la figura 2.6, siendo el nuevo Estado Estacionario el punto EE_1 . El mismo razonamiento lo podríamos haber hecho con la variable nivel de producción. El signo del nivel de producción es negativo, lo que significa que para que esta ecuación vuelva a ser cero el nivel de producción tiene que aumentar. Esto supone que para cada nivel de precios, el nivel de producción tiene que ser ahora mayor, por lo que también nos indica que la nueva condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción la tenemos que dibujar a la derecha de la anterior.

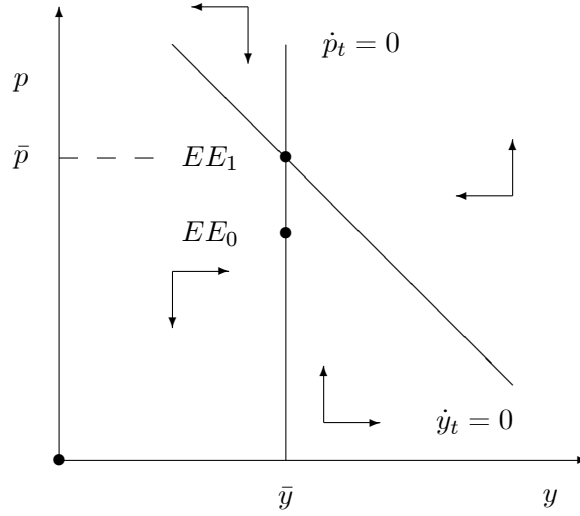


Figura 2.6: Nuevo Estado Estacionario. Efectos a largo plazo del aumento en la cantidad de dinero

El nuevo estado estacionario, representado por el punto EE_1 , nos indica que en el largo plazo los efectos de un aumento en la cantidad de dinero van a ser nulos sobre el nivel de producción, al tiempo que va a provocar un aumento en el nivel de precios. En efecto la perturbación analizada, una alteración en la cantidad de dinero, es una perturbación de carácter nominal, que en el largo plazo no va a tener efectos reales sobre la economía. Así, el nivel de producción, que es una variable real, no se va a ver afectado en el largo plazo, y su valor será siendo el nivel de producción potencial. Por su parte, toda la perturbación nominal se va a transmitir a precios, dado que dicha perturbación generaría inflación. De este modo el aumento en la cantidad de dinero, en el largo plazo, provocaría un aumento en el nivel de precios de la economía.

Un razonamiento similar podemos hacer utilizando el valor de las variables en Estado Estacionario y calculando su derivada respecto a la perturbación. Así, el valor de las variables en Estado Estacionario calculado anteriormente es:

$$\bar{p}_t = \frac{\theta\beta_0}{\beta_1} + m_t - \left(\psi + \frac{\theta}{\beta_1}\right)\bar{y}_t \quad (2.23)$$

$$\bar{y}_t = \bar{y}_t \quad (2.24)$$

Derivando ambos valores respecto a la cantidad de dinero, obtenemos el cambio en el largo plazo del nivel de precios y del nivel de producción ante esta perturbación:

$$\frac{d\bar{p}_t}{dm_t} = 1$$

$$\frac{d\bar{y}_t}{dm_t} = 0$$

Como podemos apreciar la derivada del nivel de producción de Estado Estacionario respecto a la cantidad de dinero es cero, indicando que a largo plazo el nivel de producción de la economía no se ve alterado por esta perturbación. En efecto, la variación en la cantidad de dinero es una perturbación de carácter nominal, que no tiene efectos reales en el largo plazo. No obstante, esto no quiere decir que no tenga efectos a corto y medio plazo. Por su parte, la derivada del nivel de precios de Estado Estacionario respecto a la cantidad de dinero es positiva e igual a 1, indicando que en el largo plazo cualquier alteración en la cantidad de dinero se transmite a precios en la misma proporción (si la cantidad de dinero aumenta un 5%, a largo plazo el nivel de precios también aumenta un 5%). Esto es precisamente lo que nos dice la Teoría Cuantitativa del dinero, que a largo plazo la inflación es un fenómeno monetario.

Una vez determinados los efectos a largo plazo y el nuevo Estado Estacionario, a continuación vamos a analizar cómo es la dinámica de la economía, es decir, como pasamos del Estado Estacionario inicial (EE_0) al nuevo Estado Estacionario (EE_1), es decir, lo que denominamos el corto y el medio plazo.

Como podemos comprobar, la economía se encuentra ahora en una situación de desequilibrio, en una zona situada a la derecha de la condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción, si bien los precios son constantes, dado que el nivel de producción es igual al potencial. En efecto, el aumento en la cantidad de dinero supone una inyección de liquidez en la economía que dispone de mayores recursos para el gasto. Dicho aumento en la liquidez es el causante del exceso de demanda que se genera en el mercado de bienes. Esta situación va a provocar un aumento en el nivel de producción, ya que se va a ajustar al alza ante el nuevo nivel de demanda, lo que nos va a llevar a la zona situada a la derecha de la $\dot{p}_t = 0$ y a la izquierda de la $\dot{y}_t = 0$. En esta zona de desequilibrio

existe una situación de exceso de demanda en el mercado de bienes junto con una situación de sobreproducción, provocando, por tanto, esta perturbación, una expansión de la economía. Tal y como nos indica el diagrama de flujos, nos moveríamos hacia la derecha y hacia arriba (figura 2.7), aumentando tanto el nivel de producción como el nivel de precios.

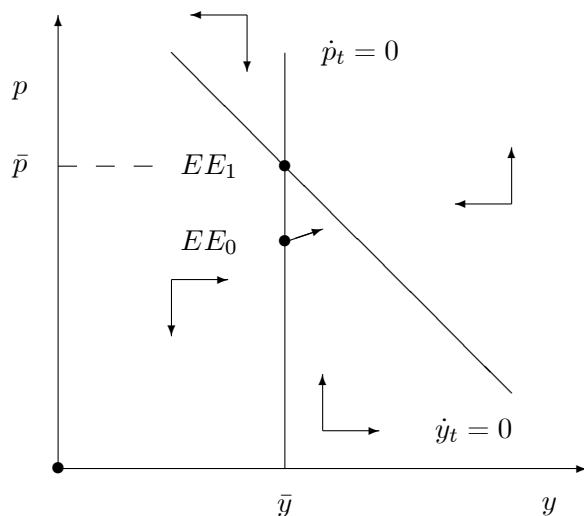


Figura 2.7: Fase expansiva. Aumento del nivel de producción y de los precios

Esta fase expansiva va a continuar hasta que alcancemos la condición de equilibrio dinámico para el nivel de producción ($\dot{y}_t = 0$). En este momento desaparece el exceso de demanda provocado por el aumento en la cantidad de dinero, debido al aumento de precios que se ha generado. Sin embargo, dado que el nivel de producción es superior al potencial, persisten las tensiones inflacionistas, por lo que el nivel de precios sigue aumentando hasta que pasamos a la zona de desequilibrio situada arriba a la derecha. En esta zona de desequilibrio se produce sobreproducción junto con un exceso de oferta. Esto es debido a que la demanda agregada sigue disminuyendo como consecuencia del aumento de precios. En esta zona de desequilibrio la economía se mueve hacia arriba hacia la izquierda, dado que el nivel de precios sigue aumentando mientras que el nivel de producción disminuye. Por tanto, hemos pasado de

una etapa de expansión a una fase de recesión económica, tal y como muestra la figura 2.8. A esta fase del ciclo también se le denomina estanflación, esto es, una situación en la cual hay estancamiento o reducción del nivel de actividad económica junto con altas tasas de inflación.

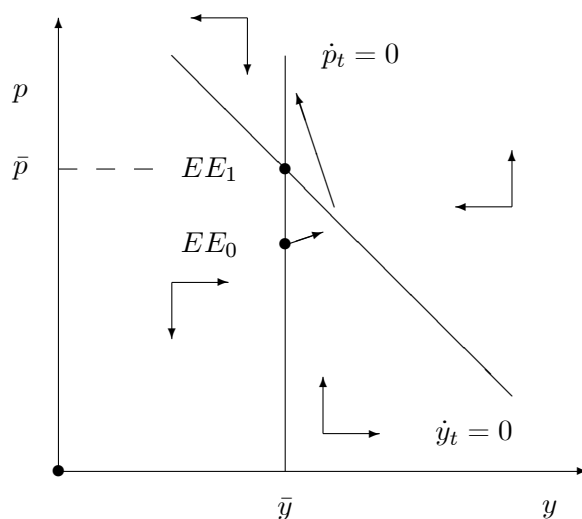


Figura 2.8: Fase de recesión. Disminución del nivel de producción y aumento del nivel de precios

La fase de recesión va a continuar hasta que alcancemos la condición de equilibrio dinámico para el nivel de precios ($\dot{p}_t = 0$), pero en un nivel de precios muy superior al inicial. En este momento desaparece la situación de sobreproducción y el nivel de producción vuelve a ser igual al potencial, por lo que desaparecen las tensiones inflacionistas. Sin embargo, sigue persistiendo la situación de exceso de oferta en el mercado de bienes y servicios, por lo que la producción sigue disminuyendo, lo que nos lleva a la zona de desequilibrio situada arriba a la izquierda. En esta zona de desequilibrio tanto el nivel de precios como el nivel de producción disminuyen, dado lugar a lo que conocemos como una crisis económica o situación de recesión. Por tanto, la economía se movería ahora hacia abajo y hacia la izquierda, tal y como ilustra la figura 2.9, dado que estamos en una situación de exceso de oferta pero conjuntamente con una situación

de infraproducción, que es lo que elimina las presiones inflacionistas y empuja los precios a la baja.

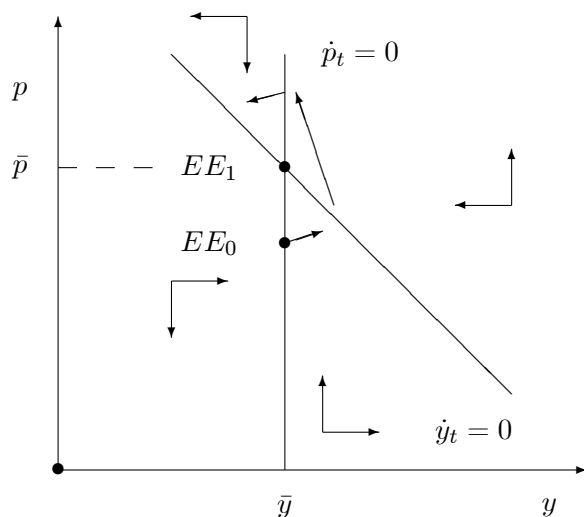


Figura 2.9: Fase de crisis: Disminución en el nivel de producción y en los precios

La fase de crisis va a continuar hasta que alcancemos de nuevo la condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción ($\dot{y}_t = 0$). En este momento el mercado de bienes vuelve al equilibrio, desapareciendo el exceso de oferta. No obstante la economía se encuentra en una situación de infraproducción, por lo que los precios continuarían disminuyendo, por lo que pasaríamos a la zona de desequilibrio situada abajo a la izquierda. En esta zona se produce la recuperación de la economía, ya que la disminución de precios nos lleva a una situación de exceso de demanda en el mercado de bienes, que reactiva la producción. Por tanto, ahora nos movemos hacia abajo, ya que los precios disminuyen, y hacia la derecha, por lo que aumenta el nivel de producción, iniciándose por tanto la recuperación de la actividad económica.

Este movimiento de la economía nos llevaría a un punto de desequilibrio similar al que teníamos anteriormente (exceso de demanda en el mercado de bienes), pero ahora la economía estaría más cerca del nuevo estado estacionario. La economía ha recorrido un gran camino para llegar a este punto, pasando por una gran

variedad de desequilibrios, pero sólo ha conseguido realizar una corrección parcial. El desequilibrio en este punto sigue siendo el mismo que existía inicialmente, pero de menor cuantía. A partir de este momento la economía seguiría los mismos pasos comentados anteriormente, iniciándose de nuevo un ciclo económico con las mismas fases, pero más amortiguadas. Estos ciclos se irían repitiendo en el tiempo, con cada vez menor amplitud, hasta que la economía alcance el nuevo estado estacionario.

Este ejercicio nos ilustra como una perturbación, puede generar fluctuaciones cíclicas de la economía en un contexto muy simple, fluctuaciones que están generadas por las rigideces que muestran determinadas variables para ajustarse a la nueva situación.

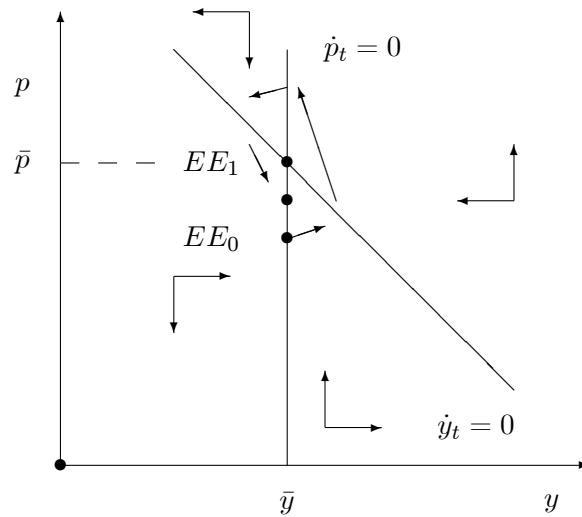


Figura 2.10: Fase de recuperación: Aumento del nivel de producción y disminución de los precios

2.3 Ejercicio 2: La economía en términos reales

Vamos ahora a resolver el mismo modelo que en el ejercicio 1, pero utilizando otras variables endógenas de referencia para ilustrar el hecho de que podemos redefinir una variable macroeconómica en términos de otras. La estructura de la economía vendría dada por el

siguiente sistema de ecuaciones, exactamente igual que en el ejercicio anterior:

$$m_t - p_t = \psi y_t - \theta i_t \quad (2.25)$$

$$y_t^d = \beta_0 - \beta_1(i_t - \dot{p}_t^e) \quad (2.26)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.27)$$

$$\dot{y}_t = v(y_t^d - y_t) \quad (2.28)$$

En lugar de resolver el modelo en términos de precios y nivel de producción, como nuestras variables endógenas de referencia, en este ejercicio vamos a resolver el modelo en términos de los **saldos reales** y **nivel de producción**. Es decir, vamos a determinar el equilibrio de la economía en términos de variables reales, en lugar de utilizar una variable nominal como es el nivel de precios, pero sin alterar la estructura de la economía.

Para ello, necesitamos en primer lugar definir la variable saldos reales, que sería:

$$l_t = m_t - p_t \quad (2.29)$$

Por tanto, ahora tendríamos una nueva ecuación de ajuste para los saldos reales, que simplemente sería la derivada respecto al tiempo de su definición:

$$\dot{l}_t = \dot{m}_t - \dot{p}_t \quad (2.30)$$

Como la cantidad de dinero es exógena, esto quiere decir que la tomamos como una constante. Por tanto, suponemos que la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero es cero:

$$\dot{m}_t = 0 \quad (2.31)$$

dado que tanto la cantidad de dinero como su tasa de crecimiento son variables exógenas que decide el Banco Central. Por tanto, la ecuación diferencial para los saldos reales vendría dada por:

$$\dot{l}_t = -\dot{p}_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.32)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales sería:

$$\dot{l}_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.33)$$

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + (\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1)y_t + \frac{\beta_1}{\theta}l_t - \beta_1\mu\bar{y}_t \right] \quad (2.34)$$

En notación matricial resultaría:

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_t \\ \dot{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \frac{v\beta_1}{\theta} & v(\beta_1\mu - \frac{\beta_1\psi}{\theta} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ v & -v\beta_1\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Una vez obtenidas las dos condiciones de equilibrio dinámicas (igualando a cero las dos ecuaciones dinámicas anteriores), procedemos a representarlas gráficamente. Para ello únicamente tenemos que calcular su pendiente. La pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de precios), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero viene dada por:

$$\frac{dl_t}{dy_t} \big|_{\dot{l}_t=0} = \frac{\mu}{0} = \infty \quad (2.36)$$

por lo que la representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica para los saldos reales sería una línea vertical.

La figura 2.11 muestra la condición de equilibrio dinámica parcial de los saldos reales junto con los movimientos de esta variable en desequilibrio. Para que exista equilibrio parcial en los saldos reales la única condición necesaria es que el nivel de producción sea igual al potencial, dado que es la situación en la que también los precios son constantes. Es decir, para que los saldos reales sean constantes, también tienen que ser constante el nivel de precios. A la derecha de esta condición de equilibrio parcial el nivel de producción es superior al potencial, lo que presionaría al alza el nivel de precios disminuyendo por tanto los saldos reales. A la izquierda de esta condición ocurriría lo contrario.

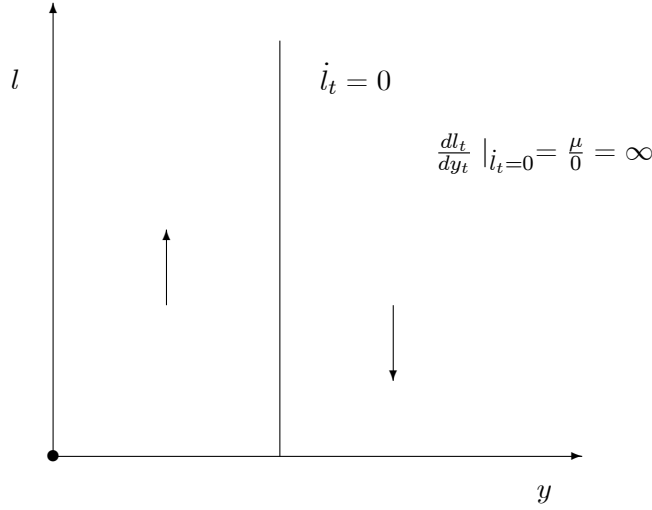


Figura 2.11: Condición de equilibrio dinámica parcial para los saldos reales

Por su parte, la pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero sería:

$$\frac{dl_t}{dy_t} \big|_{\dot{y}_t=0} = \frac{\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1}{-\frac{\beta_1}{\theta}} \gtrless 0 \implies > 0 \quad (2.37)$$

Como podemos comprobar el denominador es negativo y del ejercicio anterior sabemos que el numerador tiene que ser también negativo (esto lo sabemos por el análisis de estabilidad) para que existan trayectorias convergentes al estado estacionario, por lo que resulta que esta condición de equilibrio dinámica tiene pendiente positiva.

La figura 2.12 muestra la condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción, junto con los movimientos de esta variable en desequilibrio. Como podemos observar, la pendiente de esta condición es positiva, dado que en el eje vertical estamos representando los saldos reales que es la inversa de los precios (recuérdese que en ejercicio anterior la pendiente del nivel de producción era negativa porque en el eje vertical representábamos el nivel de precios). A la derecha de esta condición de equilibrio dinámica parcial, el nivel de producción es demasiado elevado dado

un determinado nivel de saldos reales, por lo que la producción disminuiría, ya que en esta zona se produce una situación de exceso de oferta en el mercado de bienes. Por el contrario, a la izquierda de esta condición de equilibrio dinámica, existe un exceso de demanda en el mercado de bienes, por lo que la producción aumentaría.

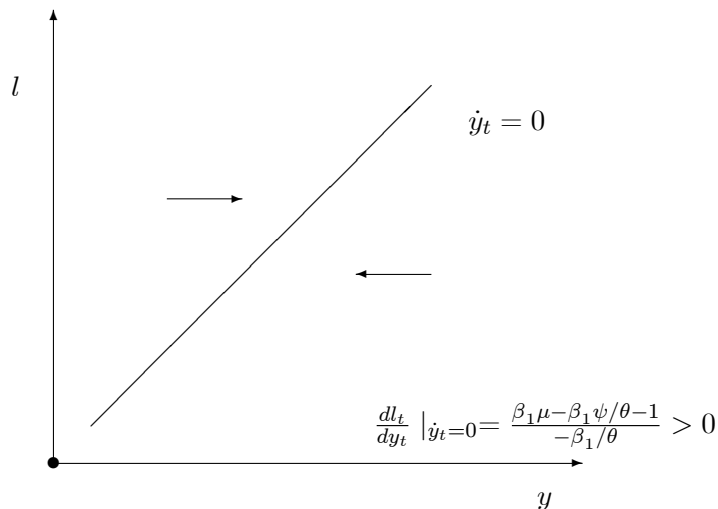


Figura 2.12: Condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción

Una vez representada la información contenida en cada ecuación diferencial, a continuación procedemos a representar gráficamente nuestra economía a través del **Diagrama de flujos**, tal y como muestra la figura 2.13. Como podemos observar, todas las trayectorias nos llevan hacia el estado estacionario aunque de forma asintótica, dado que la solución a este modelo es de estabilidad global, como hemos comprobado anteriormente. De nuevo tenemos las mismas zonas de desequilibrio, con la única diferencia de que ahora la economía la representamos en términos del nivel de producción y de los saldos reales. La diferencia respecto al diagrama de flujos del modelo anterior es que ahora la economía se mueve en la dirección de las agujas del reloj, es decir, al contrario del movimiento obtenido anteriormente. Esto es debido a que en el eje vertical estamos representando a los saldos reales, que es la inversa del nivel de precios (suponiendo que la cantidad de dinero es constante).

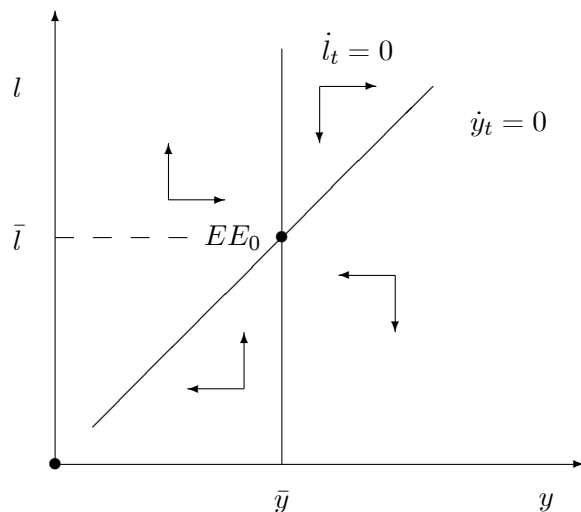


Figura 2.13: Diagrama de flujos de la economía

2.3.1 Efectos de un aumento en la cantidad de dinero

Vamos a suponer que se produce un aumento en la cantidad de dinero. Para analizar dicha perturbación en términos gráficos procedemos de la misma forma que anteriormente, es decir, representando en primer lugar el nuevo estado estacionario. Para ello tenemos que ver en qué ecuación aparece la cantidad de dinero como variable exógena. Como podemos comprobar la cantidad de dinero NO aparece en ninguna de las dos ecuaciones dinámicas. Esto significa que el estado estacionario de la economía no se va a ver afectado por dicha perturbación, o dicho de otro modo, en el largo plazo los efectos de esta perturbación van a ser nulos. Por tanto tenemos que $EE_0 = EE_1$.

Debemos que tener en cuenta que la cantidad de dinero forma parte de una de las variables endógenas de referencia, los saldos reales. Por tanto, esta variable va a cambiar en la misma medida en que cambie la cantidad de dinero. Dicho cambio es instantáneo a la perturbación. Esta nueva situación viene representada por la figura 2.14, en la cual observamos como el estado estacionario no se ve alterado pero la economía pasa a una situación de desequilibrio debido al aumento en los saldos reales. A esta alteración instantánea es a lo que vamos a denominar corto plazo. En el ejercicio anterior no

hemos definido exactamente a qué llamábamos corto plazo, porque no existía. Esto era debido a que las dos variables endógenas en términos de las cuales representamos a la economía son variables rígidas, que no se altera de forma inmediata ante una perturbación. Pero en este caso, tenemos una variable que es flexible si se produce una alteración en la cantidad de dinero. Esta variable son los saldos reales, dado que en su definición aparece la cantidad de dinero. Por tanto, definimos el corto plazo como un lapso de tiempo muy pequeño, prácticamente instantáneo, que viene determinado por el cambio que se produce de forma inmediata en los saldos reales como consecuencia del aumento en la cantidad de dinero.

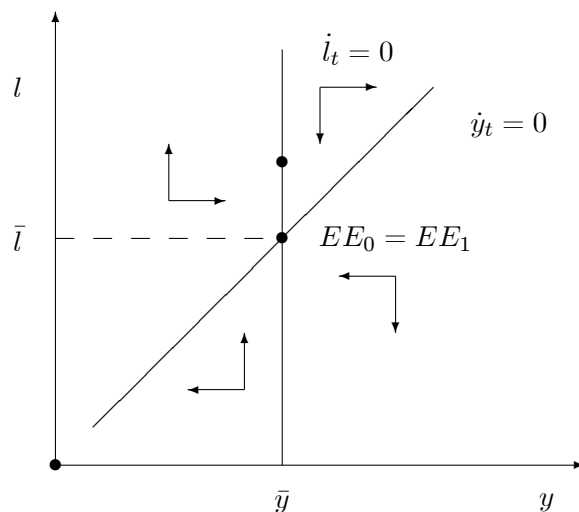


Figura 2.14: Efectos a corto y largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero

El aumento en los saldos reales nos lleva a una situación de desequilibrio en términos del nivel de producción, ya que nos encontraríamos a la izquierda de dicha condición de equilibrio, lo que reflejaría la existencia de un exceso de demanda en el mercado de bienes. Una vez se produce la perturbación, el exceso de demanda en el mercado de bienes provocaría un aumento de la producción, por lo que la economía pasaría a situarse en el área de desequilibrio situada arriba a la derecha. En esta área el nivel de producción aumentaría pero disminuirían los saldos reales, debido al aumento de los precios.

Esto significa que la economía se movería hacia abajo y a la derecha. Esto nos llevaría a la zona de desequilibrio situada abajo a la derecha, en la que tanto el nivel de producción como los saldos reales disminuirían. Esto es debido a que en esta zona existe sobreproducción y exceso de oferta en el mercado de bienes. Por tanto, la economía se movería hacia abajo y a la izquierda. Esto nos llevaría a la zona de desequilibrio situada abajo a la izquierda, donde el nivel de producción disminuiría pero los saldos reales aumentarían (los precios disminuirían).

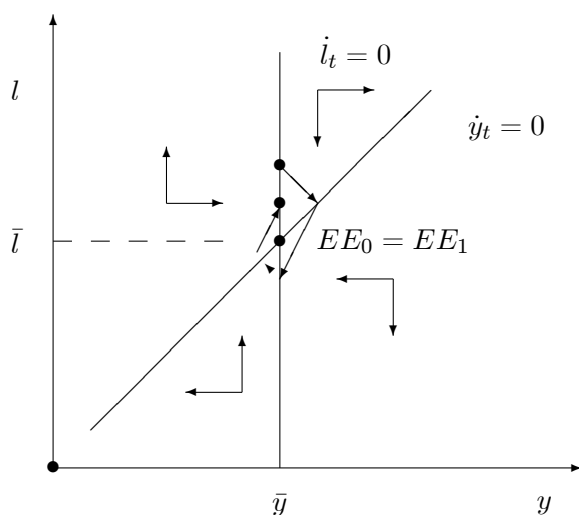


Figura 2.15: Efectos dinámicos de un aumento en la cantidad de dinero

Esto es debido a que en esta zona existe infraproducción pero con exceso de oferta en el mercado de bienes. Por tanto, la economía se movería hacia arriba y a la izquierda. Esto nos llevaría a la zona de desequilibrio situada arriba a la izquierda, en la que tanto los saldos reales como el nivel de producción aumentaría, dado que existe infraproducción junto con exceso de demanda en el mercado de bienes. Así, la economía se movería hacia arriba y hacia la izquierda, hasta alcanzar una situación de desequilibrio similar a la inicial pero más cerca del nuevo estado estacionario. Al final, en el largo plazo, la economía terminará en el mismo lugar que tenía inicialmente, ya que esta perturbación de carácter nominal no va a tener efectos

reales, es decir, tanto el nivel de producción como los saldos reales permanecerán constantes en el largo plazo, a pesar de que a medio y largo plazo se vean afectados por la alteración en la cantidad de dinero.

2.4 Ejercicio 3: La política monetaria

Vamos a hablar ahora de **política monetaria**. Para ello tenemos que introducir en nuestro modelo la variable que define la política monetaria, es decir, la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. Esto es, necesitamos considerar que la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero sea positiva:

$$\dot{m}_t > 0 \quad (2.38)$$

La política monetaria vendría definida por cambios en dicha variable. Así una política monetaria expansiva viene definida por un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, mientras que una política monetaria restrictiva vendría definida por una disminución en la misma.

Ahora la inflación tendría dos componentes: el componente cíclico (como anteriormente) y que depende de la diferencia entre el nivel de producción de la economía y su nivel potencial y un componente tendencial ($\dot{m}_t$), que viene determinado por la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero.

La estructura de la economía en este caso vendría dada por las siguientes ecuaciones:

$$m_t - p_t = \psi y_t - \theta i_t \quad (2.39)$$

$$y_t^d = \beta_0 - \beta_1(i_t - \dot{p}_t^e) \quad (2.40)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) + \dot{m}_t \quad (2.41)$$

$$\dot{y}_t = v(y_t^d - y_t) \quad (2.42)$$

Tal y como podemos comprobar, la estructura de la economía sigue siendo la misma que en los dos ejercicios anteriores. Esto es así,

porque el único cambio que hemos introducido es la incorporación de una nueva variable exógena, pero las variables endógenas siguen siendo las mismas.

Por otra parte, esta versión del modelo con la variable de política monetaria no puede ser resuelta en términos del nivel de precios, dado que no es constante en ningún momento del tiempo. Por tanto, las variables de referencia van a ser los saldos reales y el nivel de producción. Las ecuaciones diferenciales de nuestra economía van a ser las siguientes. En primer lugar, la condición de equilibrio dinámica para los saldos reales sería:

$$\dot{l}_t = \dot{m}_t - \dot{p}_t = \dot{m}_t - \mu(y_t - \bar{y}_t) - \dot{m}_t = -\mu(y_t - \bar{y}_t) = -\dot{p}_t \quad (2.43)$$

Para obtener la ecuación diferencial del nivel de producción, despejamos el tipo de interés nominal y lo sustituimos en la demanda agregada y sustituyendo a su vez en la ecuación de ajuste del nivel de producción (una vez que hemos supuesto la existencia de previsión perfecta) obtenemos:

$$\dot{y}_t = v \left[\beta_0 + (\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1)y_t + \frac{\beta_1}{\theta} l_t - \beta_1 \bar{y}_t + \beta_1 \dot{m}_t \right] \quad (2.44)$$

Tal y como podemos comprobar estas ecuaciones diferenciales son las mismas que hemos obtenido en el ejercicio anterior, excepto por el hecho de que aparece una nueva variable exógena, la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, en la ecuación dinámica del nivel de producción. Si las ecuaciones son las mismas (excepto porque cambia una constante en una de ellas) entonces la representación gráfica de la economía tiene que ser la misma que anteriormente.

En efecto, la pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de precios), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, es infinito:

$$\frac{dl_t}{dy_t} \big|_{\dot{l}_t=0} = \frac{\mu}{0} = \infty \quad (2.45)$$

La figura 2.16 muestra la representación gráfica de la condición de equilibrio dinámica parcial para los saldos reales, así como los movimientos de esta variable cuando está en desequilibrio. Como

podemos comprobar, esta condición de equilibrio parcial es vertical, indicando que la única condición necesaria para que los saldos reales permanezcan constantes en el tiempo es que el nivel de producción sea igual al potencial. Por su parte, a la derecha de esta condición de equilibrio parcial existe sobreproducción, por lo que los precios estarían aumentando, lo que implica que los saldos reales estarían disminuyendo. A la izquierda existiría infraproducción, por lo que los precios estarían disminuyendo y, por tanto, aumentarían los saldos reales.

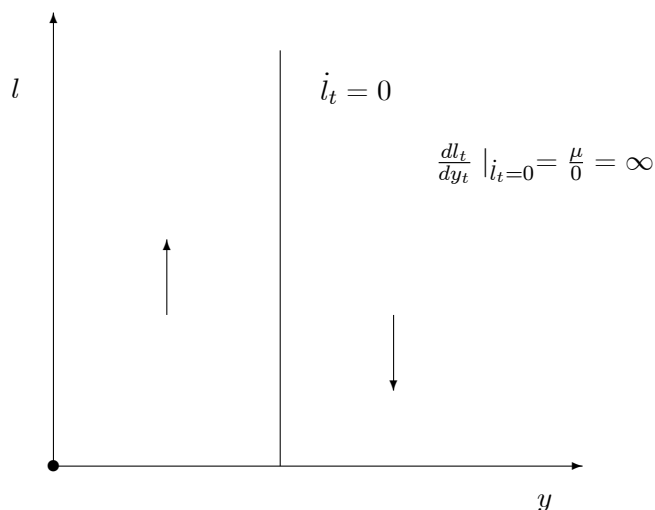


Figura 2.16: Condición de equilibrio dinámica parcial para los saldos reales

Por su parte, la pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, es positiva:

$$\frac{dl_t}{dy_t} \Big|_{\dot{y}_t=0} = \frac{\beta_1 \mu - \frac{\beta_1 \psi}{\theta} - 1}{-\frac{\beta_1}{\theta}} \geq 0 \implies > 0 \quad (2.46)$$

La figura 2.17 muestra la condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción de la economía. Como podemos comprobar, en este caso esta condición de equilibrio tiene pendiente positiva, ya que en el eje vertical estamos representando los saldos reales, que

es la inversa del nivel de precios. Esta condición nos dice que para que el nivel de producción permanezca constante en el tiempo, para valores altos del nivel de producción también se requieren valores altos para el nivel de saldos reales. Por otra parte, también aparece indicado en la figura 2.17 el comportamiento del nivel de producción en desequilibrio. Tal y como podemos observar, a la derecha de esta condición de equilibrio dinámico, o bien los saldos reales son muy bajos o bien el nivel de producción es demasiado alto, lo que representa una situación de exceso de oferta, por lo que el nivel de producción disminuiría. A la izquierda de dicha condición de equilibrio parcial, el nivel de saldos reales es muy alto o bien el nivel de producción es demasiado bajo, lo que está representando una situación de exceso de demanda en el mercado de bienes y servicios, por lo que el nivel de producción aumentaría.

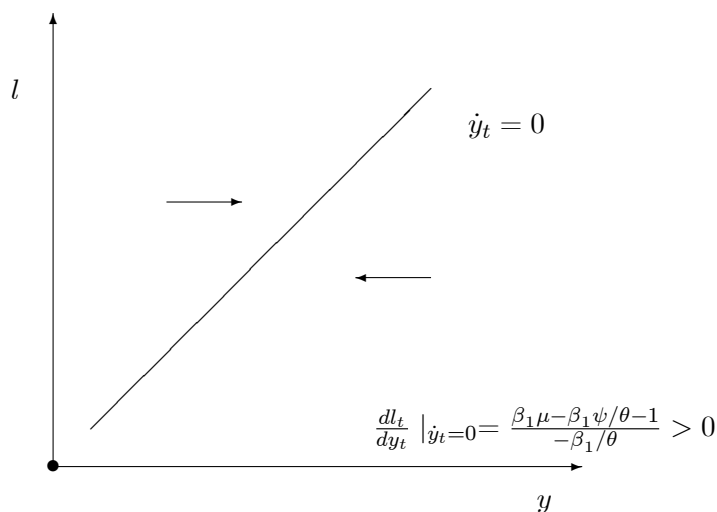


Figura 2.17: Condición de equilibrio dinámica para el nivel de producción

La representación de la economía dada por el modelo viene dada por la figura 2.18. Tal y como podemos observar, la economía es igual que la representada en el ejercicio anterior. Si suponemos que si la cantidad de dinero permanece constante, entonces los saldos reales simplemente es la inversa del nivel de precios. Sin embargo, en este caso hemos introducido la variable de política económica, por lo que

la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero la suponemos positiva y vamos a comprobar como cambios en esta variable van a provocar alteraciones a largo plazo en los saldos reales de la economía.

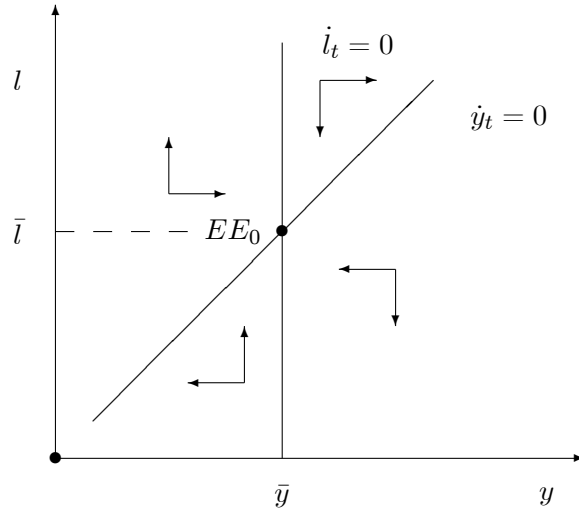


Figura 2.18: Diagrama de flujos de la economía

2.4.1 Efectos de un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero

Vamos a suponer ahora que se produce un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. A esta perturbación se le llama una "*política monetaria expansiva*", que no debemos confundir con una alteración en la cantidad de dinero. Una alteración de la cantidad de dinero es una perturbación nominal, que no tiene ninguna relación con la política monetaria.

Para proceder con nuestro análisis, tenemos que ver en qué ecuación aparece la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero como variable exógena. La tasa de crecimiento de la cantidad de dinero aparece en la ecuación dinámica del nivel de producción. Si se produce un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero ($\uparrow \dot{m}_t$), la condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de producción estaría situada a la derecha de la anterior, debido a que ahora para cada nivel de saldos reales el nivel de producción

tiene que ser mayor, o bien que para dado un nivel de producción los saldos reales tienen que ser menores.

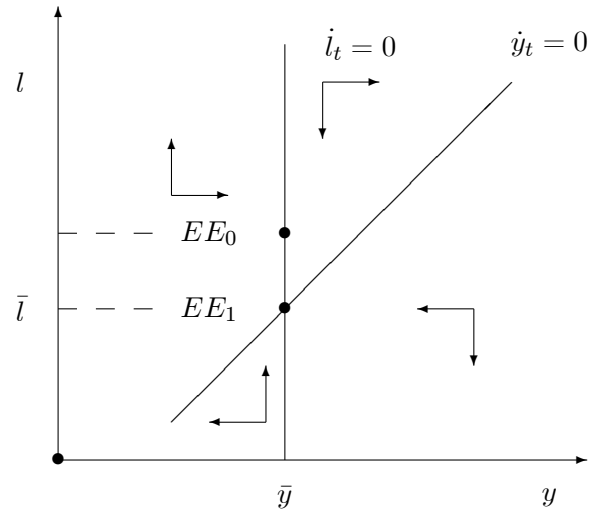


Figura 2.19: Efectos a largo plazo de una política monetaria expansiva

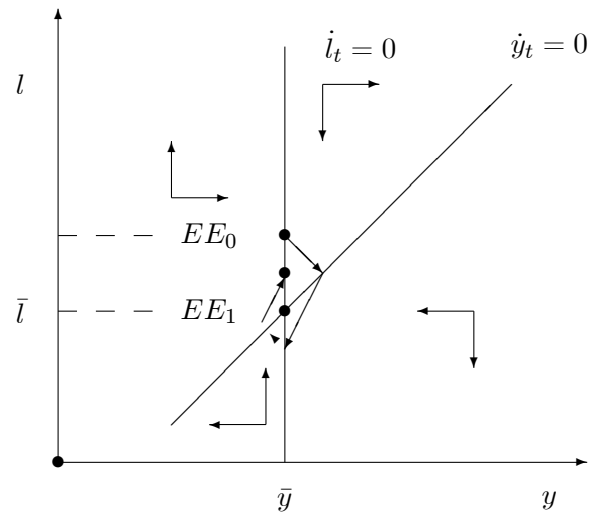


Figura 2.20: Efectos dinámicos de una política monetaria expansiva

La figura 2.19 muestra los efectos a largo plazo del aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. Como podemos comprobar, el nuevo estado estacionario está situado por debajo del inicial, indicando que a largo plazo el nivel de producción permanece constante y que se produce una disminución en los saldos reales.

La figura 2.20 representa la evolución a medio plazo de la política monetaria expansiva. Esta figura muestra que el aumento de la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero provoca que la economía esté situada a la derecha de la condición de equilibrio parcial para el nivel de producción, reflejando una situación de exceso de demanda en el mercado de bienes. Este exceso de demanda va a generar tanto un aumento del nivel de producción como un aumento del nivel de precios, lo que disminuye los saldos reales. Tal y como aparece reflejado en la figura 2.20, la economía comenzaría a moverse hacia la derecha y hacia abajo, pasando por los distintos desequilibrios posibles entre las dos variables endógenas de referencia. A largo plazo vemos que los saldos reales son inferiores a los iniciales, debido al aumento en la inflación. Esto significa que el aumento en la inflación es superior al aumento en la cantidad de dinero, indicando que han aumentado las expectativas de inflación. Por tanto, el resultado que obtenemos es que una política monetaria expansiva deprime a largo plazo los saldos reales de la economía, debido a que aumentan las expectativas inflacionistas.

2.5 Ejercicio 4: El desbordamiento del tipo de cambio

Vamos a continuar con nuestros ejercicios, pero analizando una economía abierta. A estas alturas ya no deberíamos tener muchos problemas con la resolución de este tipo de modelos. Como hemos visto, el procedimiento de resolución es el mismo y una vez que conocemos sus rudimentos, no debería ser muy complicado enfrentarnos a cualquier modelo de estas características y usarlo para el estudio de distintas perturbaciones. No obstante, aún existen ciertas particularidades que hemos de estudiar. En concreto vamos a estudiar ahora un modelo que presenta trayectorias tanto estables como inestables, por lo que hemos de introducir un nuevo elemento en nuestro análisis: la senda estable.

Vamos a suponer la existencia de una economía abierta pequeña. El hecho de suponer que es una economía pequeña es para que las variables del exterior sean consideradas como exógenas. Si no hacemos este supuesto, entonces las variables del exterior no podrían ser consideradas como exógenas, ya que se verían afectadas por el comportamiento de esta economía. Al hacer el supuesto de economía pequeña nos estamos asegurando que nuestra economía no tiene capacidad para afectar la determinación de las variables del resto del mundo. Es decir, las variables del exterior las consideramos como variables exógenas.

A la hora de considerar una economía abierta, tenemos dos relaciones de equilibrio a nivel internacional, que van a relacionar a nuestra economía con el resto del mundo. Estas relaciones de equilibrio corresponden por un lado al mercado de dinero y por otro al mercado de bienes y servicios. La relación de equilibrio entre los mercados de dinero nacional y del exterior viene determinada a través de la Paridad No Cubierta de Intereses. La relación de equilibrio entre los mercados de bienes y servicios nacional y del exterior viene determinada por la Paridad del Poder Adquisitivo.

Este modelo lo vamos a utilizar para resolver uno de los puzzles económicos de mayor relevancia en el ámbito de las economías abiertas y que fué resuelto por Dornbusch en los años setenta. El puzzle es el siguiente: Si atendemos a lo que nos dice la paridad del poder adquisitivo, resulta que un aumento en la cantidad de dinero provocaría un aumento en el nivel de precios y por tanto un aumento en el tipo de cambio nominal en el largo plazo. Por el contrario, si observamos el comportamiento resultante de la paridad no cubierta de intereses, obtenemos que el aumento en la cantidad de dinero provocaría una disminución en el tipo de interés nominal y por tanto una disminución en el tipo de cambio nominal. Este efecto se produciría durante todo el proceso de ajuste hacia el nuevo estado estacionario. Por tanto, de la paridad no cubierta de intereses obtendríamos que el aumento en la cantidad de dinero provocaría una disminución permanente en el tipo de cambio nominal. El problema reside en cómo es posible que, dado un aumento en la cantidad de dinero, el tipo de cambio nominal tiene que estar disminuyendo pero a largo plazo tiene que aumentar respecto a la situación inicial. Para resolver este enigma, vamos a utilizar un modelo dinámico simple de

economía abierta, que nos va a permitir analizar como son los efectos dinámicos de dicha perturbación.

La estructura de la economía viene dada por las siguientes cuatro ecuaciones:

$$m_t - p_t = \psi y_t - \theta i_t \quad (2.47)$$

$$y_t^d = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) - \beta_2 i_t \quad (2.48)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t - \bar{y}_t) \quad (2.49)$$

$$\dot{s}_t^e = i_t - i_t^* \quad (2.50)$$

donde s el logaritmo del tipo de cambio, p^* , el logaritmo del nivel de precios del exterior e i^* el tipo de interés nominal del exterior.

La primera ecuación es la demanda de dinero. Como podemos observar, no cambia respecto a la que tendríamos en una economía cerrada. La segunda ecuación es la demanda agregada de una economía abierta, que se ve alterada, ya que hemos de considerar la demanda exterior de bienes nacionales. Cuando definimos la demanda agregada de una economía, ésta viene determinada por la demanda de los bienes que se producen en dicha economía, es decir, no sólo se considera el componente interno sino también el componente externo (las exportaciones netas). Como podemos comprobar la demanda agregada de una economía abierta depende positivamente del tipo de cambio real, definido como las desviaciones de la paridad del poder adquisitivo, y que refleja el nivel de competitividad exterior vía precios de la economía. Por otra parte, suponemos que la demanda agregada depende negativamente del tipo de interés nominal, en lugar de depender negativamente del tipo de interés real que sería lo correcto. En este caso hemos hecho una simplificación, debido a que los resultados no van a verse alterados si en lugar del tipo de interés real consideramos el tipo de interés nominal, si bien esto no lo sabemos a priori, por lo que lo correcto sería utilizar el tipo de interés real. Las otras dos ecuaciones son ecuaciones dinámicas que nos indican como se ajustan los precios y la ecuación de ajuste del tipo de cambio nominal, que es la paridad no cubierta de intereses.

Tal y como podemos comprobar tenemos 5 variables endógenas: Nivel de precios nacionales, nivel de producción, tipo de interés nominal, nivel de demanda y tipo de cambio nominal. Por otra parte tenemos 5 variables exógenas: cantidad de dinero, gasto público, nivel de precios del exterior, nivel de producción potencial y tipo de interés del exterior. Sin embargo, esto significa que tenemos 5 variables endógenas y sólo 4 ecuaciones. O bien falta una ecuación o sobra una variable endógena para poder seguir resolviendo este modelo. En principio, deberíamos incluir una nueva ecuación, que nos permita determinar la variable endógena para la cual no tenemos especificado su comportamiento que es el nivel de producción. Es decir, necesitaríamos una nueva ecuación que en este caso sería la oferta agregada. La otra posibilidad es simplificar y eliminar la variable endógena que no viene determinada, es decir, el nivel de producción, si bien hemos de tener en cuenta que esto podría afectar a los resultados obtenidos. Así, suponemos que el nivel de producción es siempre igual al potencial ($y_t = \bar{y}_t$).

Las variables endógenas de referencia en términos de las cuales vamos a resolver nuestro modelo son el **nivel de precios** y el **tipo de cambio nominal**.

Por tanto, la estructura de la economía viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_t - p_t = \psi \bar{y}_t - \theta i_t \quad (2.51)$$

$$y_t^d = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) - \beta_2 i_t \quad (2.52)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t^d - \bar{y}_t) \quad (2.53)$$

$$\dot{s}_t^e = i_t - i_t^* \quad (2.54)$$

Como podemos comprobar, el nivel de producción que aparece en la demanda de dinero ahora sería el nivel de producción potencial. Por su parte, el nivel de producción también aparecería en la ecuación de ajuste del nivel de precios. Sin embargo, si consideramos que este nivel de producción es igual al potencial la ecuación sería cero. Como en este caso la producción de la economía es constante, la única variable que afectaría a los precios serían las diferencias entre el nivel de demanda y el nivel de producción potencial. Por tanto,

redefinimos el comportamiento de los precios en función de esta diferencia, reflejando la existencia de exceso de demanda o exceso de oferta en el mercado de bienes y servicios.

Otra posibilidad sería suponer que la demanda agregada es siempre igual al nivel de producción ($y_t^d = y_t$), lo que nos permitiría eliminar una de ellas, pero los resultados continuarían siendo los mismos.

A continuación calculamos las ecuaciones diferenciales para las variables de referencia. Despejamos el tipo de interés nominal de la ecuación (2.51):

$$i_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi \bar{y}_t) \quad (2.55)$$

Sustituimos (2.55) en (2.52) y obtenemos la demanda agregada de la economía:

$$y_t^d = \beta_0 + \beta_1(s_t - p_t + p_t^*) + \frac{\beta_2}{\theta}(m_t - p_t - \psi \bar{y}_t) \quad (2.56)$$

Sustituyendo esta ecuación en la expresión (2.53) obtenemos la ecuación dinámica para el nivel de precios:

$$\dot{p}_t = \mu\beta_0 + \mu\beta_1 s_t + \mu\beta_1 p_t^* - \mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\theta}\right)p_t + \frac{\mu\beta_2}{\theta}m_t - \mu\left(\frac{\psi\beta_2}{\theta} + 1\right)\bar{y}_t \quad (2.57)$$

Por su parte, sustituyendo la ecuación (2.55) en la expresión (2.54), obtenemos la ecuación dinámica para el tipo de cambio nominal, una vez que hemos aplicado previsión perfecta y eliminado las expectativas:

$$\dot{s}_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi \bar{y}_t) - i_t^* \quad (2.58)$$

Podemos simplificar las variables exógenas: Por ejemplo podemos normalizar a 1 el nivel de precios del exterior. Por tanto $p_t^* = 0$.

El modelo en notación matricial quedaría:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{s}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\theta}\right) & \mu\beta_1 \\ \frac{1}{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_t \\ s_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu\beta_0 & \frac{\mu\beta_2}{\theta} & -\mu\left(\frac{\psi\beta_2}{\theta} + 1\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\theta} & \frac{\psi}{\theta} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ m_t \\ \bar{y}_t \\ i_t^* \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Antes de continuar con nuestro análisis debemos de llevar a cabo el análisis de estabilidad con objeto de conocer qué tipo de trayectorias muestra nuestro sistema de ecuaciones. Para ello calculamos:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -\mu(\beta_1 + \frac{\beta_2}{\theta}) - \lambda & \mu\beta_1 \\ \frac{1}{\theta} & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.60)$$

$$\lambda^2 + \lambda \left[\beta_1\mu + \frac{\beta_2\mu}{\theta} \right] - \frac{\beta_1\mu}{\theta} = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{-(\beta_1\mu + \frac{\beta_2\mu}{\theta}) \pm \sqrt{\left[(\beta_1\mu + \frac{\beta_2\mu}{\theta}) \right]^2 + \frac{4\beta_1\mu}{\theta}}}{2} \quad (2.62)$$

Como podemos comprobar el signo del coeficiente anterior a la raíz cuadrada es negativo, mientras que el signo dentro de la raíz cuadrada es positivo. Por tanto $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, por lo que tendríamos una solución de punto de silla, en la cual una raíz es positiva y la otra es negativa, por lo que existirían trayectorias tanto convergentes como divergentes respecto al estado estacionario. Esto significa que ahora nuestro modelo nos está representando situaciones que no son posibles desde el punto de vista económico. Estas situaciones van a venir determinadas por una combinación de valores para las variables endógenas nivel de precios y tipo de cambio nominal que dan lugar a trayectorias para ambas variables que nos alejan de forma permanente del estado estacionario. En el caso de que se produzca una perturbación, vamos a comprobar como la economía se mueve siempre desde el estado estacionario inicial a una zona de desequilibrio en la cual las trayectorias son convergentes hacia el estado estacionario.

Para representar a la economía en este caso necesitamos no solo representar las condiciones de equilibrio dinámico parcial para cada una de las variables endógenas de referencia, sino que también es necesario la representación gráfica de la senda estable, que nos indica la zona por la cual las trayectorias son convergentes hacia el estado estacionario. Esta senda estable es la que va a determinar el comportamiento de las variables en el medio plazo.

Por otra parte, la existencia de una solución de punto de silla está relacionada con el hecho de que una de las variables endógenas de referencia, el tipo de cambio nominal, es una variable flexible, que puede ajustarse de forma inmediata ante una determinada

perturbación. Por tanto, ahora existe lo que previamente hemos denominado el corto plazo, que consiste en el lapso de tiempo en el cual se produce el ajuste del tipo de cambio nominal ante la perturbación, ajuste que nos va a llevar hasta la senda estable.

A continuación procedemos a la representación gráfica de las condiciones de equilibrio dinámicas. La pendiente de la ecuación diferencial de la primera variable endógena (nivel de precios), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, viene dada por:

$$\frac{ds_t}{dp_t} \big|_{\dot{s}_t=0} = \frac{-1/\theta}{0} = \infty \quad (2.63)$$

Por su parte, la pendiente de la ecuación diferencial de la segunda variable endógena (nivel de producción), bajo la restricción de que la derivada con respecto al tiempo de esta variable es cero, es:

$$\frac{ds_t}{dp_t} \big|_{\dot{p}_t=0} = \frac{\beta_1 + \frac{\beta_2}{\theta}}{\beta_1} = 1 + \frac{\beta_2}{\theta\beta_1} > 1 \quad (2.64)$$

La figura 2.21 muestra la condición de equilibrio dinámica parcial para el tipo de cambio nominal. Esta condición es vertical, indicando que independientemente de cual sea el tipo de cambio nominal de la economía, la única condición necesaria para que el tipo de cambio nominal sea constante es que el nivel de precios de la economía sea igual a su nivel potencial. En efecto, de la paridad no cubierta de intereses obtenemos que para que el tipo de cambio nominal sea constante se requiere que el tipo de interés nacional sea igual al tipo de interés del exterior. Por tanto, el tipo de interés nominal de equilibrio de la economía es igual al tipo de interés del exterior. Esto solo se va a cumplir cuando el nivel de precios nacional esté en equilibrio. Por otra parte, también representamos el comportamiento del tipo de cambio nominal en desequilibrio.

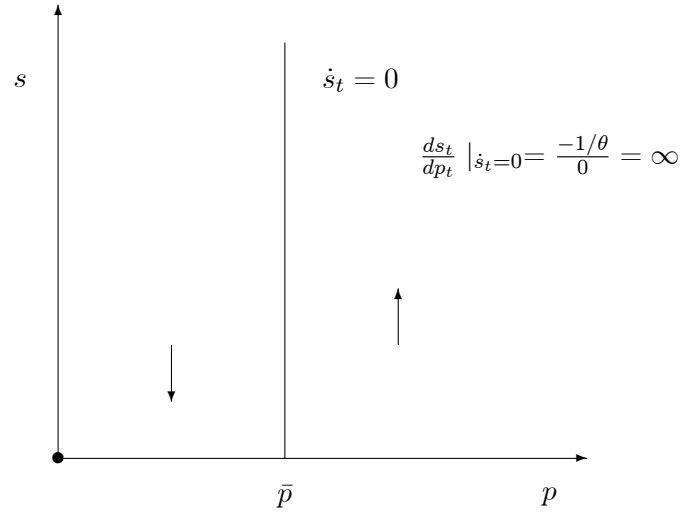


Figura 2.21: Condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio nominal

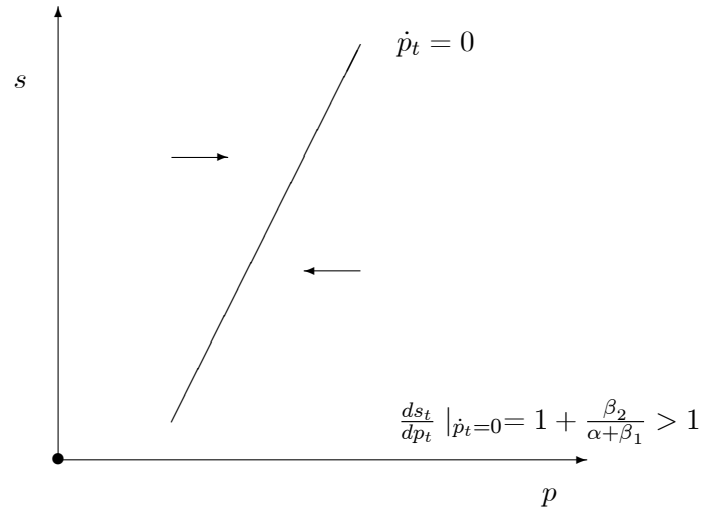


Figura 2.22: Condición de equilibrio dinámica para el nivel de precios

La figura 2.22 muestra la condición de equilibrio dinámica parcial para el nivel de precios, que tiene pendiente positiva y además es

superior a la unidad (la pendiente de una recta de 45 grados sería la unidad), es decir, es muy vertical. Esto significa que para que el nivel de precios permanezca constante en el tiempo, cuanto mayor sea el nivel de precios mayor tiene que ser el tipo de cambio nominal. Esto es precisamente lo que nos dice la paridad del poder adquisitivo.

La representación gráfica de la economía viene dada por la figura 2.23. Como podemos observar, junto con las condiciones de equilibrio dinámicas parciales y el correspondiente diagrama de flujos, hemos dibujado también la senda estable. Esto es así porque la solución del modelo se corresponde con un punto de silla y, por tanto, existen tanto trayectorias estables que nos llevan al estado estacionario, como trayectorias inestables que nos alejan del estado estacionario. Así, las situaciones de desequilibrio que nos llevarían al estado estacionario estarían situadas o bien arriba a la izquierda, o bien abajo a la derecha. Por tanto, la senda estable tendría pendiente negativa.

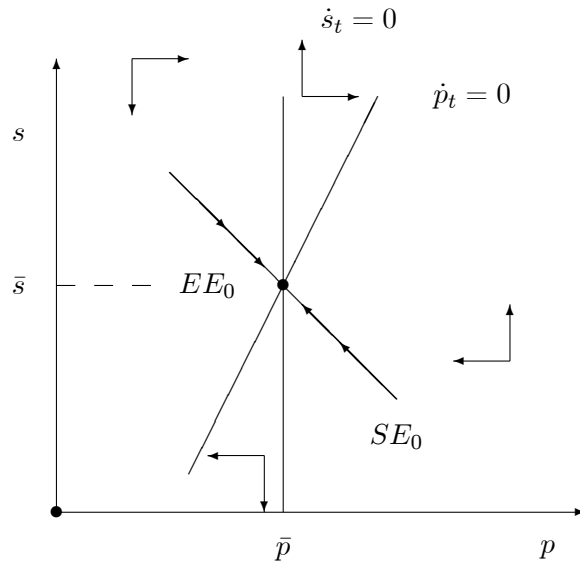


Figura 2.23: Diagrama de flujos de la economía

2.5.1 Efectos de un aumento en la cantidad de dinero

Una vez resuelto el modelo, a continuación realizamos el análisis de perturbaciones. Vamos a suponer que se produce un aumento en la cantidad de dinero. Esta perturbación va a producir el fenómeno

conocido como la sobrerreacción del tipo de cambio (overshooting), fenómeno que fue estudiado por Dornbusch. En primer lugar, vamos a calcular los efectos de largo plazo a partir de la definición de estado estacionario. El valor de las variables en estado estacionario vendría dado por:

$$\bar{p}_t = m_t - \psi \bar{y}_t + \theta i_t^* \quad (2.65)$$

$$\bar{s}_t = m_t - \frac{\beta_0}{\beta_1} - \left[\frac{1 - \psi \beta_1}{\beta_1} \right] \bar{y}_t + \frac{\theta \beta_1 + \beta_2}{\beta_1} i_t^* \quad (2.66)$$

Calculando las derivadas respecto a la cantidad de dinero obtenemos:

$$\frac{d\bar{p}_t}{dm_t} = 1; \quad \frac{d\bar{s}_t}{dm_t} = 1 \quad (2.67)$$

es decir, ambas derivadas son positivas e igual a 1. Esto significa que a largo plazo, el aumento en la cantidad de dinero provoca un aumento proporcional tanto en el nivel de precios como en el tipo de cambio nominal. Es decir, si la cantidad de dinero aumenta en un 5%, a largo plazo, tanto el nivel de precios como el tipo de cambio nominal aumentarán en un 5%. Por tanto, se cumple el principio de neutralidad monetaria y la paridad del poder adquisitivo en el largo plazo.

En términos gráficos tendríamos que la cantidad de dinero aparece tanto en la ecuación dinámica del tipo de cambio nominal como en la ecuación dinámica del nivel de precios, por lo que se produciría un cambio de las constantes de ambas ecuaciones. En concreto, podemos observar que ambas ecuaciones de equilibrio dinámica parcial estarían ahora situadas a la derecha de la posición inicial. En efecto, el signo asociado a la cantidad de dinero en la ecuación dinámica del nivel de precios es positivo, por lo que un aumento en la cantidad de dinero desplazaría esta ecuación hacia la derecha dado que el signo asociado a los precios es negativo (o bien que el signo asociado al tipo de cambio nominal es positivo). Por otra parte, el signo asociado a la cantidad de dinero en la ecuación dinámica del tipo de cambio nominal es negativo, mientras que el signo del nivel de precios es positivo, por lo que también esta condición de equilibrio dinámica parcial se desplazaría hacia la derecha (si aumenta la

cantidad de dinero el nivel de precios tiene que aumentar para que el tipo de cambio no varíe en el tiempo).

Si las dos condiciones de equilibrio dinámicas parciales se desplazan hacia la derecha, sabemos que la variable que está representada en el eje horizontal, el nivel de precios, va a aumentar en el largo plazo. Sin embargo, no sabemos que sucede con la variable que está representada en el eje vertical, el tipo de cambio nominal, ya que esta puede aumentar, puede permanecer constante o bien puede disminuir, dependiendo del cambio en las constantes de ambas condiciones de equilibrio dinámicas. ¿Cómo podemos saber que le sucede al tipo de cambio nominal a largo plazo? Lo sabemos a través de la derivada de su valor de estado estacionario respecto a la perturbación. Como hemos visto anteriormente esta derivada es positiva, por lo que gráficamente tenemos que representar las nuevas condiciones de equilibrio dinámico parcial tal que aumenten en el largo plazo tanto el nivel de precios como el tipo de cambio nominal, tal y como aparece reflejado en la figura 2.24.

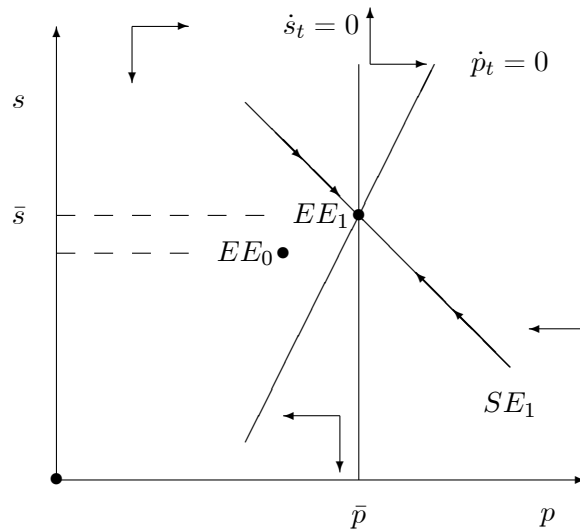


Figura 2.24: Efectos a largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero

Dado que en este caso una de las variables endógenas de referencia (el tipo de cambio nominal) es una variable flexible, vamos a distinguir entre corto, medio y largo plazo. El largo plazo ya lo

hemos definido anteriormente: es el periodo de tiempo que tarda la economía en ajustarse hasta alcanzar el nuevo estado estacionario. El corto plazo va a ser realmente un lapso de tiempo realmente corto, estando representado por el ajuste de la variable flexible. En este caso, dicho ajuste va a ser instantáneo y se va a producir justo en el momento en que se produzca la perturbación, estando provocado por un cambio en las expectativas sobre el comportamiento futuro del tipo de cambio.

Por su parte, el medio plazo, va a ser el lapso de tiempo que transcurre entre el corto plazo y el largo plazo, es decir, es el periodo de tiempo más importante, dado que la economía va a tardar un periodo de tiempo elevado en ajustarse totalmente hasta alcanzar el nuevo estado estacionario. En términos teóricos, el largo plazo correspondería a un periodo de tiempo infinito, ya que al acercarse al estado estacionario, la economía se movería cada vez de forma más lenta. El comportamiento de la economía en el medio plazo es el que directamente viene definido por el valor que toman en cada momento del tiempo las dos ecuaciones diferenciales del modelo y es el que viene representado por las flechitas que forman el diagrama de flujos de la economía.

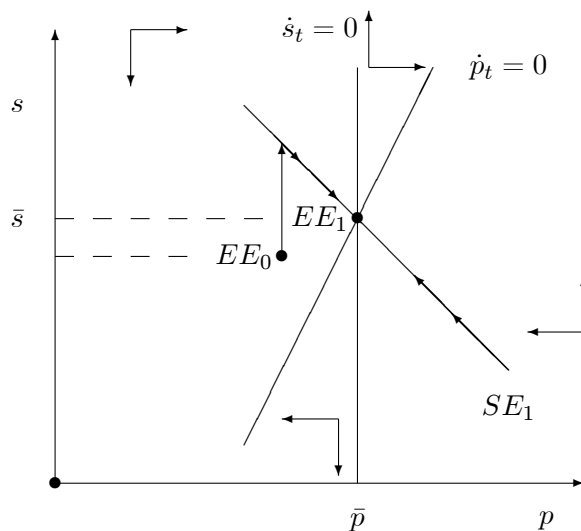


Figura 2.25: Efectos a corto plazo de un aumento en la cantidad de dinero

El salto que se produce en el tipo de cambio en el corto plazo, y el causante del fenómeno de la sobre-reacción, podemos calcularlo en términos cuantitativos. Para ello partimos de la ecuación dinámica del tipo de cambio:

$$\dot{s}_t = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi \bar{y}_t) - i_t^* \quad (2.68)$$

Paralelamente, podemos definir las trayectorias estables respecto al tipo de cambio, que están asociadas a la raíz negativa:

$$\dot{s}_t = \lambda_1(s_t - \bar{s}_t) \quad (2.69)$$

Como podemos comprobar, ambas ecuaciones dan como resultado la derivada respecto al tiempo del tipo de cambio nominal, por lo que podemos igualar ambas ecuaciones:

$$\lambda_1(s_t - \bar{s}_t) = -\frac{1}{\theta}(m_t - p_t - \psi \bar{y}_t) - i_t^* \quad (2.70)$$

Despejando el valor del tipo de cambio resulta:

$$s_t = \frac{-(m_t - p_t - \psi \bar{y}_t)}{\theta \lambda_1} - \frac{i_t^*}{\lambda_1} + \bar{s}_t \quad (2.71)$$

Finalmente, derivamos el valor del tipo de cambio respecto a la perturbación (esto permite conocer el ajuste en las expectativas):

$$\frac{ds_t}{dm_t} = \frac{-1}{\theta \lambda_1} + \frac{d\bar{s}_t}{dm_t} = 1 - \frac{1}{\theta \lambda_1} > 1 \quad (2.72)$$

Como podemos comprobar, la derivada es positiva y superior a la unidad, dado que $\lambda_1 < 0$, lo que indica que una determinada variación en la cantidad de dinero provoca un aumento más que proporcional del tipo de cambio nominal. Este cambio instantáneo es precisamente a lo que denominamos sobre-reacción (o desbordamiento) del tipo de cambio nominal.

Finalmente, el medio plazo viene dado por el comportamiento de las variables que se deriva de las ecuaciones dinámicas que componen nuestro modelo. Tal y como podemos observar en la figura 2.26, una vez que la economía ha alcanzado la senda estable, a continuación, se produce un aumento del nivel de precios a medida que disminuye el tipo de cambio nominal. Es decir, nos movemos a lo largo de la senda estable, tal y como predice la paridad no cubierta de intereses.

En efecto, el aumento en la cantidad de dinero provoca de forma inmediata una disminución del tipo de interés nacional, por lo que dada la paridad no cubierta de intereses, se produce una apreciación del tipo de cambio nominal, por lo que éste disminuye. Por otra parte, la perturbación monetaria se traslada a precios, aumentando éstos de forma gradual. Este comportamiento se va a producir hasta que la economía alcance el nuevo estado estacionario.

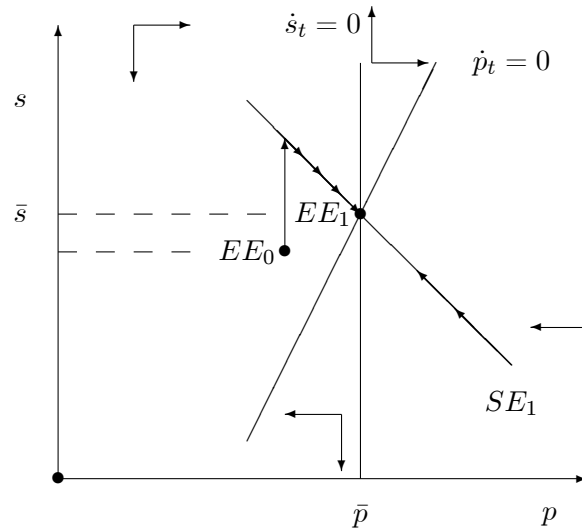


Figura 2.26: Efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero

2.6 Ejercicio 5: Perturbaciones anticipadas

En los ejercicios realizados anteriormente hemos estudiado los efectos a lo largo del tiempo de distintas perturbaciones. Sin embargo, dichos análisis están basados en el supuesto de que estas perturbaciones eran no anticipadas, por lo que sólo producían efectos a partir del momento en el que se producían. Sin embargo, en la realidad, observamos la existencia de determinadas perturbaciones que son anunciadas con un determinado espacio de tiempo antes de que se produzcan. Este es el caso de muchas perturbaciones de política económica, como por ejemplo, un cambio en los impuestos.

El efecto que provocan ambos tipos de perturbaciones van a ser diferentes a corto y medio plazo, si bien a largo plazos sus efectos van a ser los mismo. En este ejercicio vamos a utilizar el modelo desarrollado en la sección anterior para ilustrar los efectos de un aumento en la cantidad de dinero, pero de forma anticipada, a efectos de compararlos con los resultados obtenidos anteriormente. Para ello partimos del estado estacionario inicial, definido en la figura 2.27. En este momento, suponemos que se produce un anuncio, de que en un momento futuro, se va a producir un aumento en la cantidad de dinero. En dicho momento, las variables de la economía siguen siendo las mismas, ya que nada ha cambiado, pero el conjunto de información disponible para los agentes a la hora de formar sus expectativas es diferente. Ahora los agentes saben que en un momento futuro se va a producir un aumento en la cantidad de dinero.

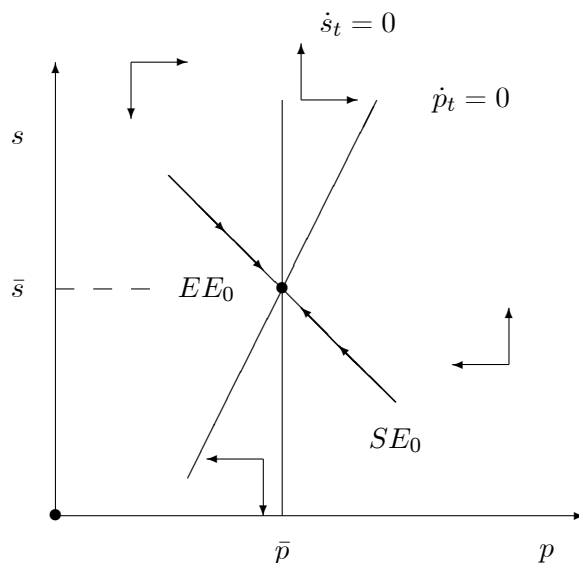


Figura 2.27: Estado estacionario inicial

La situación de la economía en el momento en que se produce el anuncio viene representada en la figura 2.28. Como podemos observar, aunque no cambie ninguna variable, el mero anuncio de que en un momento del tipo futuro se va a producir un aumento en la cantidad de dinero provoca que inmediatamente aumente el tipo de cambio. Este efecto está provocado por las expectativas de los

agentes, que saben que a largo plazo la medida anunciada provocará un aumento del tipo de cambio. Por tanto, dicha información la incorporan en su proceso de formación de expectativas, generando un aumento en el tipo de cambio. En cualquier caso, el anuncio de dicha medida provoca que la economía abandone el estado estacionario inicial, tal y como se muestra en la figura 2.28.

Este aumento en el tipo de cambio nominal va a provocar que antes de que se produzca el aumento efectivo en la cantidad de dinero, los precios también comiencen a aumentar. Por tanto, la economía va a moverse hacia arriba a la derecha, tal y como aparece reflejado en la figura 2.29, aumentando tanto el tipo de cambio nominal como el nivel de precios. Este proceso se va a repetir hasta que efectivamente se produzca el aumento en la cantidad de dinero.

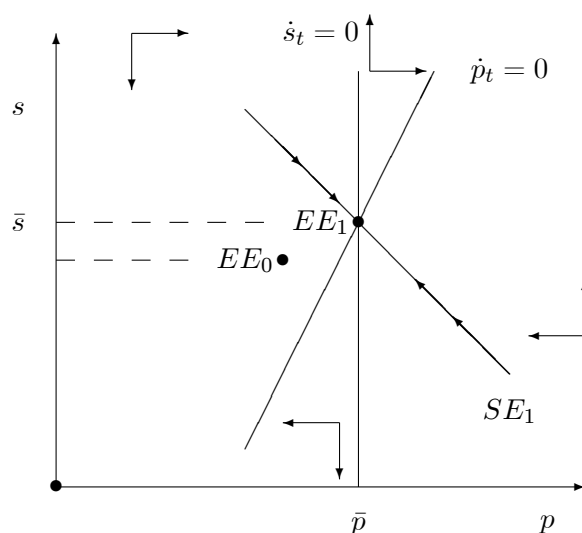


Figura 2.28: Anuncio de un aumento futuro en la cantidad de dinero ($\uparrow m$)

Vemos por tanto que los anuncios de política tienen efectos reales sobre las economías. La explicación de estos efectos se debe al cambio en las expectativas. Así, el anuncio de una medida de política económica futura es información que los agentes incorporan en la formación de sus expectativas, generando un cambio en sus decisiones que termina afectando al comportamiento de la economía.

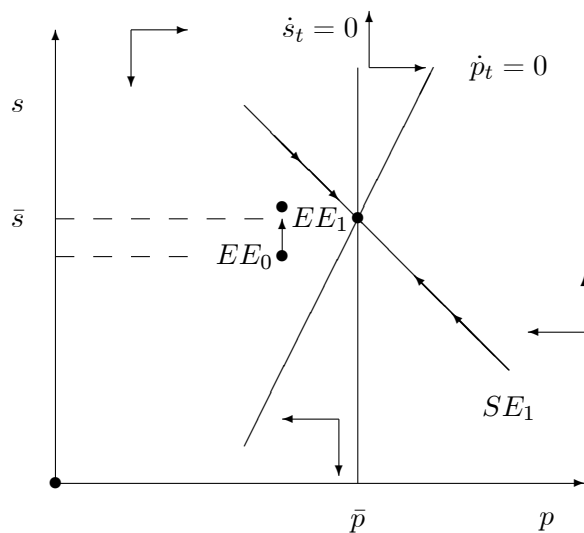


Figura 2.29: Efectos a corto plazo del anuncio

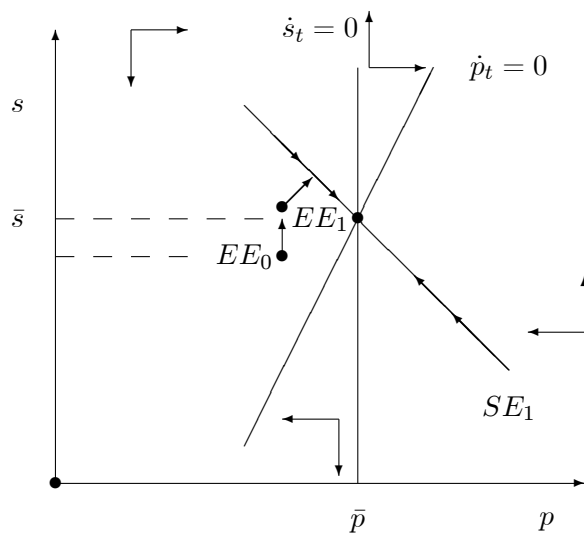


Figura 2.30: Efectos a corto y medio plazo del anuncio

En el momento en que efectivamente se produzca el aumento en la cantidad de dinero, se produce una disminución instantánea del tipo de interés nominal. Esta disminución del tipo de interés, provoca

que ahora el tipo de cambio disminuya, dada la paridad no cubierta de intereses. Por tanto, ahora la economía se mueve en la dirección que marca la senda estable, es decir hacia abajo a la derecha (figura 2.31), aumentando el nivel de precios pero disminuyendo el tipo de cambio. Este movimiento se va a repetir hasta que la economía alcance el nuevo estado estacionario.

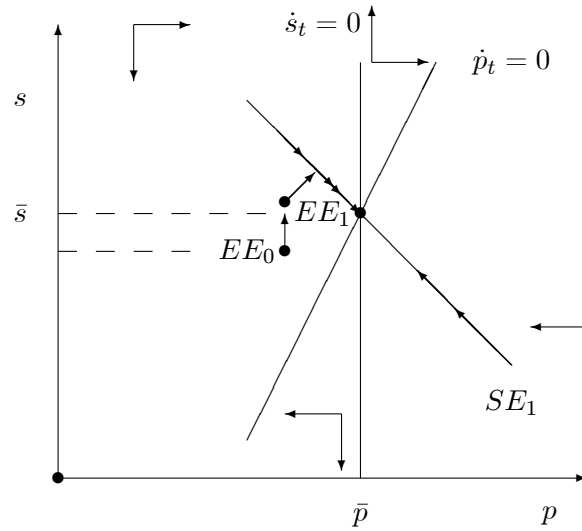


Figura 2.31: Efectos a medio plazo del aumento en la cantidad de dinero

Como podemos observar en el análisis anterior, el fenómeno de la sobre-reacción del tipo de cambio va a depender del reajuste inicial de expectativas que se produce en el momento del anuncio de la perturbación. Este reajuste va a depender del lapso de tiempo existente entre la fecha en la que se produce el anuncio y el momento en que efectivamente se va a producir la perturbación. Si este lapso de tiempo es muy pequeño, el comportamiento de la economía será muy similar al visto en el ejercicio 4, produciéndose el fenómeno de la sobre-reacción del tipo de cambio. Sin embargo, si este lapso de tiempo es lo suficientemente largo, el reajuste inicial de las expectativas no será muy significativo, por lo que se reduce el fenómeno del desbordamiento del tipo de cambio.

2.7 Ejercicio 6: Política monetaria restrictiva

En este ejercicio vamos a estudiar los efectos de una política monetaria restrictiva en el caso de una economía abierta. El modelo que vamos a analizar fue propuesto por Buitier y Miller en 1982, mostrando que una política monetaria restrictiva, si bien a largo plazo tiene efectos positivos ya que permite reducir el nivel de inflación, a corto y medio plazo tiene efectos negativos dado que reduce el nivel de competitividad exterior vía precios de la economía.

La clave está en que la política monetaria restrictiva provoca una disminución del tipo de cambio nominal y, por tanto, una disminución del tipo de cambio real, por lo que la competitividad exterior de la economía se reduce de forma instantánea. Esta pérdida de competitividad exterior vía precios se va a mantener mientras dure el proceso de ajuste a la baja de la inflación. Así, cuanto mayor sea la rigidez que muestran los precios y las expectativas de inflación mayor duración tendrá esta situación de pérdida de competitividad exterior. En este ejercicio vamos a mostrar que efectivamente una política monetaria restrictiva disminuye el tipo de cambio real a corto y medio plazo, para posteriormente analizar una combinación de perturbaciones que podrían reducir o eliminar dichos efectos negativos.

Vamos a suponer que la estructura de la economía es la siguiente:

$$m_t - p_t = \psi \bar{y}_t - \theta i_t \quad (2.73)$$

$$y_t^d = \beta_1(s_t - p_t) - \beta_2(i_t - \dot{p}_t^e) \quad (2.74)$$

$$\dot{p}_t = \mu(y_t^d - \bar{y}_t) + \dot{m}_t \quad (2.75)$$

$$\dot{s}_t^e = i_t - i_t^* \quad (2.76)$$

Resolvemos el modelo en términos de los saldos reales y del tipo de cambio real. Por tanto, en primer lugar definimos ambas variables como:

$$l_t = m_t - p_t \quad (2.77)$$

$$q_t = s_t - p_t \quad (2.78)$$

es decir, los saldos reales los obtenemos como la diferencia entre (el logaritmo de) la cantidad de dinero y el (logaritmo de) nivel de precios. Por su parte, el tipo de cambio real lo obtenemos como la desviación de la paridad del poder adquisitivo ($q_t = s_t - p_t + p_t^*$), pero hemos normalizado a 1 el nivel de precios del exterior ($p_t^* = 0$).

Por tanto, las ecuaciones diferenciales para las variables endógenas de referencia las obtenemos simplemente diferenciando todas las variables respecto al tiempo:

$$\dot{l}_t = \dot{m}_t - \dot{p}_t \quad (2.79)$$

$$\dot{q}_t = \dot{s}_t - \dot{p}_t \quad (2.80)$$

A continuación redefinimos nuestro modelo en términos de las dos variables endógenas de referencia tal que:

$$l_t = \psi \bar{y}_t - \theta i_t \quad (2.81)$$

$$y_t^d = \beta_1 q_t - \beta_2 i_t + \beta_2 \mu (y_t^d - \bar{y}_t) + \beta_2 \dot{m}_t \quad (2.82)$$

$$\dot{l}_t = -\mu (y_t^d - \bar{y}_t) \quad (2.83)$$

$$\dot{q}_t = i_t - i_t^* - \mu (y_t^d - \bar{y}_t) - \dot{m}_t \quad (2.84)$$

Despejamos el tipo de interés nominal:

$$i_t = -\frac{1}{\theta} l_t + \frac{\psi}{\theta} \bar{y}_t \quad (2.85)$$

Sustituyendo en la demanda agregada:

$$y_t^d = \beta_1 q_t + \frac{\beta_2}{\theta} l_t - \frac{\beta_2 \psi}{\theta} \bar{y}_t + \beta_2 \mu y_t^d - \beta_2 \mu \bar{y}_t + \beta_2 \dot{m}_t \quad (2.86)$$

$$(1 - \beta_2 \mu) y_t^d = \beta_1 q_t + \frac{\beta_2}{\theta} l_t - \left(\frac{\beta_2 \psi}{\theta} + \beta_2 \mu \right) \bar{y}_t + \beta_2 \dot{m}_t \quad (2.87)$$

Reordenando términos resulta:

$$\begin{aligned}
y_t^d = & \frac{\beta_1}{(1 - \beta_2\mu)} q_t + \frac{\beta_2}{\theta(1 - \beta_2\mu)} l_t - \left(\frac{\beta_2\psi}{\theta(1 - \beta_2\mu)} + \right. \\
& \left. + \frac{\beta_2\mu}{(1 - \beta_2\mu)} \right) \bar{y}_t + \frac{\beta_2}{(1 - \beta_2\mu)} \dot{m}_t \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales que determinan el comportamiento a lo largo del tiempo de nuestras variables endógenas de referencia son:

$$\begin{aligned}
\dot{l}_t = & -\frac{\mu\beta_1}{1 - \beta_2\mu} q_t - \frac{\mu\beta_2}{\theta(1 - \beta_2\mu)} l_t + \\
& + \left[\frac{\mu\beta_2\psi}{\theta(1 - \beta_2\mu)} + \frac{\beta_2\mu^2}{1 - \beta_2\mu} + \mu \right] \bar{y}_t - \frac{\mu\beta_2}{1 - \beta_2\mu} \dot{m}_t \quad (2.89)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_t = & -\frac{\mu\beta_1}{1 - \beta_2\mu} q_t - \frac{1}{\theta(1 - \beta_2\mu)} l_t + \\
& \left[\frac{\mu\beta_2\psi}{\theta(1 - \beta_2\mu)} + \frac{\beta_2\mu^2}{1 - \beta_2\mu} + \mu + \frac{\psi}{\theta} \right] \bar{y}_t - \frac{1}{1 - \beta_2\mu} \dot{m}_t \quad (2.90)
\end{aligned}$$

En notación matricial tendríamos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{l}_t \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} = & \frac{1}{1 - \beta_2\mu} \begin{bmatrix} -\frac{\mu\beta_2}{\theta} & -\mu\beta_1 \\ -\frac{1}{\theta} & -\mu\beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_t \\ q_t \end{bmatrix} \\
& + \frac{1}{1 - \beta_2\mu} \begin{bmatrix} 0 & -\mu\beta_2 & \frac{\mu\beta_2\psi + \theta\mu}{\theta} \\ -1 & -1 & \frac{\mu\beta_2\psi + \theta\mu + \psi(1 - \beta_2\mu)}{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_t^* \\ \dot{m}_t \\ \bar{y}_t \end{bmatrix} \quad (2.91)
\end{aligned}$$

Una vez obtenido el modelo en notación matricial, a continuación procedemos a su representación gráfica. La pendiente de la ecuación diferencial de los saldos reales es la siguiente:

$$\frac{dq_t}{dl_t} \big|_{i_t=0} = \frac{-\beta_2}{\theta\beta_1} < 0 \quad (2.92)$$

Por su parte, la pendiente de la ecuación diferencial del tipo de cambio real

$$\frac{dq_t}{dl_t} \big|_{\dot{q}_t=0} = \frac{-1}{\theta\beta_1\mu} < 0 \quad (2.93)$$

Como podemos comprobar, ambas pendientes son negativas. Ahora, tenemos que determinar que pendiente, en valor absoluto, es mayor, para poder representarlas gráficamente. Para ello tenemos que comparar los dos miembros de la expresión siguiente:

$$\frac{-\beta_2}{\theta\beta_1} \leq \frac{-1}{\theta\beta_1\mu}$$

Si $\beta_2\mu > 1$, entonces la pendiente (en valor absoluto) de la condición de equilibrio de los saldos reales es mayor que la pendiente de la condición de equilibrio del tipo de cambio real. Por el contrario, si $\beta_2\mu < 1$, la pendiente (en valor absoluto) de la condición del tipo de cambio real es mayor que la pendiente de la condición de equilibrio para los saldos reales.

Para saber que pendiente es mayor, tenemos que recurrir al análisis de estabilidad. Para ello calcularíamos

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \frac{-\mu\beta_2}{(1-\beta_2\mu)\theta} - \lambda & \frac{-\mu\beta_1}{1-\beta_2\mu} \\ \frac{-1}{(1-\beta_2\mu)\theta} & \frac{-\mu\beta_1}{1-\beta_2\mu} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.94)$$

obteniendo la siguiente ecuación de segundo orden,

$$\lambda^2 + \lambda \left[\frac{\mu\beta_2 + \theta\mu\beta_1}{\theta(1-\beta_2\mu)} \right] + \frac{\theta\mu\beta_1(\beta_2\mu - 1)}{[\theta(1-\beta_2\mu)]^2} = 0 \quad (2.95)$$

siendo su solución:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\frac{\mu\beta_2 + \theta\mu\beta_1}{\theta(1-\beta_2\mu)} \pm \sqrt{\left[\frac{\mu\beta_2 + \theta\mu\beta_1}{\theta(1-\beta_2\mu)} \right]^2 - \frac{4\theta\mu\beta_1(\beta_2\mu - 1)}{[\theta(1-\beta_2\mu)]^2}}}{2} \quad (2.96)$$

Tal y como podemos comprobar, si $(1 - \beta_2\mu) > 0$ entonces obtenemos que una raíz es negativa y la otra positiva, ya que el signo dentro de la raíz cuadrada es positivo y el parámetro anterior a la raíz cuadrada es negativo, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Por el contrario, si suponemos que $(1 - \beta_2\mu) < 0$ entonces el signo dentro de la raíz cuadrada es negativo mientras que el parámetro anterior a la misma es positivo, por lo que las dos raíces serían positivas, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Por tanto, dado que no puede existir inestabilidad global en el sistema, el análisis de estabilidad nos indicaría que tenemos un punto de silla y que $(1 - \beta_2\mu) > 0$.

La figura 2.32 muestra la condición de equilibrio dinámica para los saldos reales. Tal y como podemos comprobar a la derecha de esta condición de equilibrio los saldos reales disminuye (el tipo de cambio real es muy elevado, es decir, la competitividad exterior vía precios es alta), mientras que a la izquierda los saldos reales aumentan (el tipo de cambio real es muy bajo).

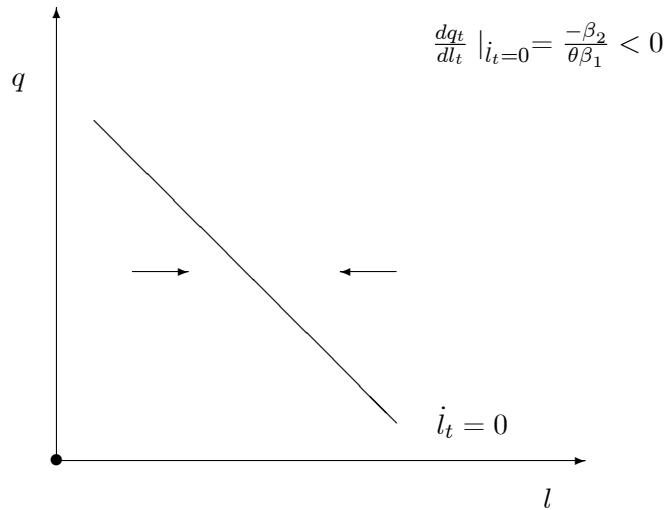


Figura 2.32: Condición de equilibrio dinámica para los saldos reales

Por su parte, la figura 2.33 muestra la condición de equilibrio del tipo de cambio real junto con su comportamiento en desequilibrio. Como podemos apreciar esta condición de equilibrio dinámico parcial también tiene pendiente negativa, siendo más vertical que la correspondiente a los saldos reales.

Como podemos observar en la ecuación correspondiente, a la derecha de esta condición de equilibrio parcial el tipo de cambio real disminuye (pérdida de competitividad exterior vía precios), mientras que a la izquierda de esta condición el tipo de cambio real aumenta. La explicación a este comportamiento la encontramos en el cumplimiento de la paridad no cubierta de intereses y en las expectativas sobre el tipo de cambio nominal. A la derecha de esta condición de equilibrio dinámica, el tipo de cambio nominal es muy elevado para el nivel de saldos reales de la economía, por lo que

existen expectativas de apreciación que provocan una disminución del tipo de cambio real.

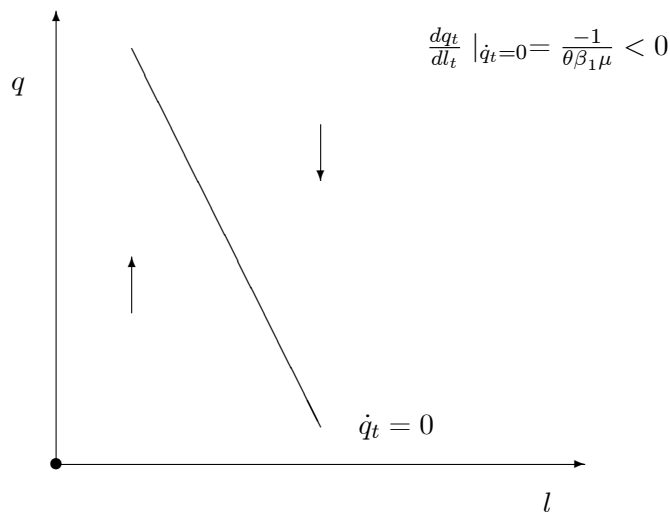


Figura 2.33: Condición de equilibrio dinámica para el tipo de cambio real

La representación gráfica de la economía viene dada en la figura 2.34. Tal y como podemos observar, ambas condiciones de equilibrio dinámicas parciales tienen pendiente negativa, pero hemos de tener en cuenta que la pendiente de la ecuación del tipo de cambio real es superior a la pendiente de la ecuación de los saldos reales. En efecto, del análisis de estabilidad, hemos obtenido que para que al menos una de las raíces sea negativa, es necesario que $(1 - \beta_2\mu) > 0$. Esto significa que la pendiente, en valor absoluto, de la ecuación del tipo de cambio real es superior a la pendiente de la ecuación de los saldos reales. La solución que obtenemos es de punto de silla, existiendo por tanto trayectorias tanto convergentes al estado estacionario como divergentes. Por otra parte, podemos observar cómo la senda estable tiene pendiente negativa, ya que las únicas trayectorias que nos llevan al estado estacionario son las situadas abajo a la izquierda y arriba a la derecha.

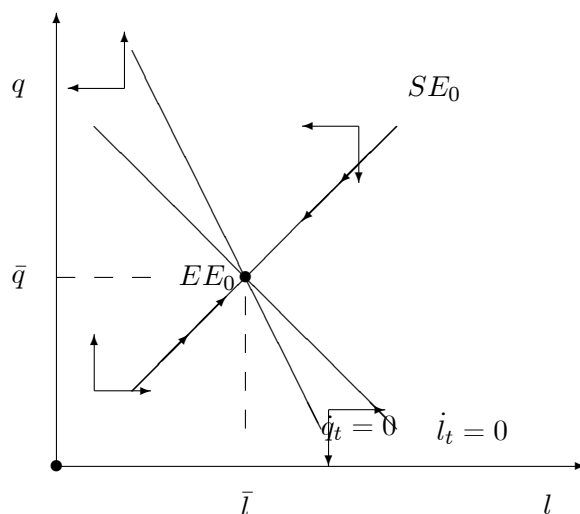


Figura 2.34: Diagrama de flujos

2.7.1 Efectos de una política monetaria restrictiva

Una vez resuelto y representado gráficamente nuestro modelo, a continuación vamos a realizar el análisis de perturbaciones. En primer lugar, vamos a estudiar los efectos a corto, medio y largo plazo de una política monetaria restrictiva, esto es, una disminución en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. Vamos a comprobar que si bien a largo plazo esta política tiene efectos beneficiosos sobre la economía, ya que reduce el nivel de inflación, a corto y medio plazo va a tener efectos negativos ya que genera una pérdida de competitividad exterior vía precios.

Analizando la ecuaciones correspondientes, observamos que la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero aparece tanto en la condición de equilibrio dinámica de los saldos reales como en la correspondiente al tipo de cambio real. La nueva representación gráfica de ambas condiciones de equilibrio dinámicas parcial se encuentra ahora a la derecha de la posición inicial. Sabemos que esto va a implicar un aumento a largo plazo de los saldos reales. ¿Qué sucede con el nivel de competitividad? Para ello hay que calcular el valor de las variables en estado estacionario, que vienen dadas por:

$$\bar{l}_t = \psi \bar{y}_t - \theta(i_t^* + \dot{m}_t) \quad (2.97)$$

$$\bar{q}_t = \frac{1}{\beta_1} \bar{y}_t + \frac{\beta_2}{\beta_1} i_t^* \quad (2.98)$$

Si derivamos ambas expresiones respecto a la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{l}_t}{\partial \dot{m}_t} = -\theta; \quad \frac{\partial \bar{q}_t}{\partial \dot{m}_t} = 0$$

es decir, una disminución en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero provoca a largo plazo un aumento en los saldos reales pero no afecta al nivel de competitividad exterior vía precios. Por tanto, el tipo de cambio real a largo plazo permanece constante.

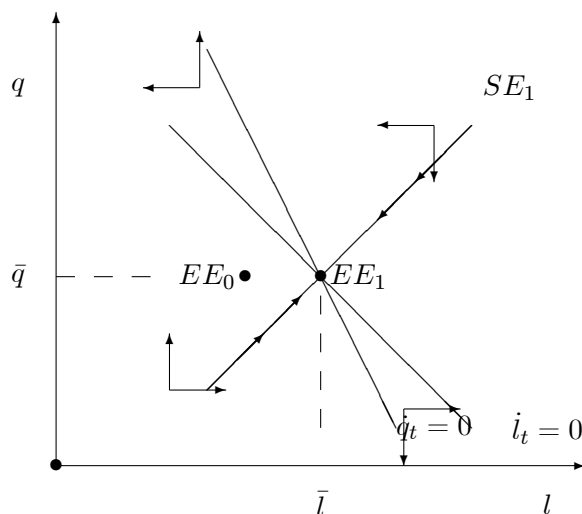


Figura 2.35: Efectos a largo plazo de una política monetaria restrictiva

Esto significa que tenemos que representar gráficamente las nuevas condiciones de equilibrio dinámicas parciales tal que el tipo de cambio real en el nuevo estado estacionario sea igual al existente en el estado estacionario inicial, tal y como aparece reflejado en la figura 2.35. Por tanto, a largo plazo, aumentan los saldos reales mientras que el tipo de cambio real permanece constante. El aumento de los saldos reales en el largo plazo es indicativo de que la política

monetaria restrictiva ha tenido éxito y ha reducido el nivel de inflación de la economía.

La figura 2.36 muestra los efectos de dicha perturbación a corto plazo. La política monetaria restrictiva va a provocar una disminución a la baja de las expectativas sobre el comportamiento futuro del tipo de cambio, por lo que va a provocar una disminución instantánea del tipo de cambio nominal (una apreciación). A su vez, dado que los precios son rígidos, esta disminución del tipo de cambio nominal provoca una disminución en igual cuantía del tipo de cambio real. Por tanto, se produce una pérdida instantánea de competitividad exterior vía precios de la economía.

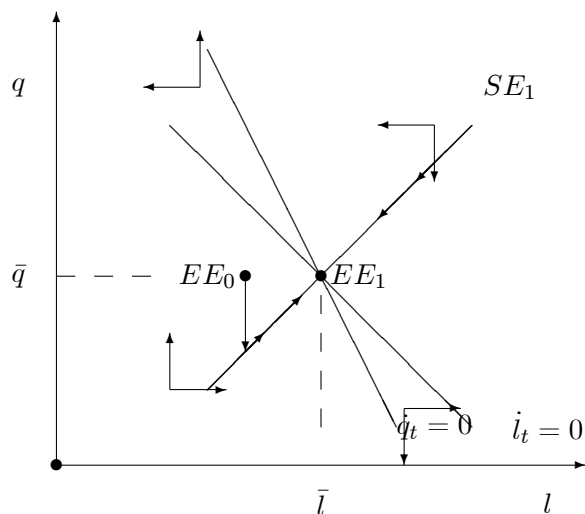


Figura 2.36: Efectos a corto plazo de una política monetaria restrictiva

La figura 2.37 muestra la dinámica completa de la economía ante dicho cambio en la política monetaria. El hecho de que los precios sean rígidos hace que la política monetaria restrictiva no tenga efectos inmediatos sobre la inflación. A medio plazo, los precios van a ir disminuyendo, lo cual va a provocar una recuperación de la competitividad exterior perdida inicialmente. Así, la economía se va a mover hacia arriba y a la derecha, dado que tanto los saldos reales como el tipo de cambio real van aumentando. Este proceso va a durar hasta que alcancemos el nuevo estado estacionario, donde el

nivel de competitividad exterior vía precios de la economía recupera su valor inicial y donde el nivel de saldos reales es superior al inicial, indicando que la política monetaria restrictiva es efectiva a la hora de reducir la inflación.

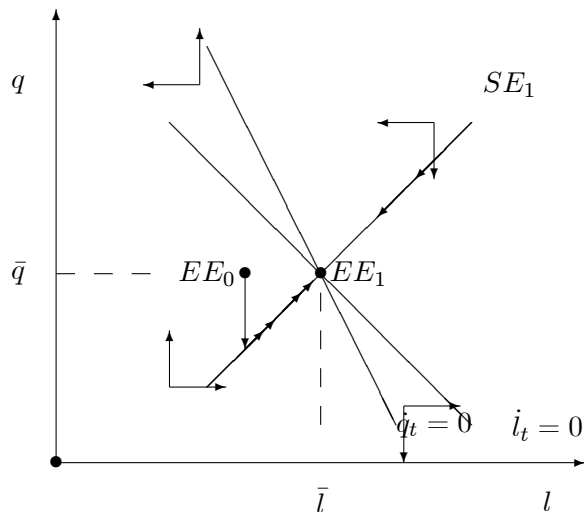


Figura 2.37: Efectos a corto, medio y largo plazo de una política monetaria restrictiva

2.7.2 Efectos de un aumento en la cantidad de dinero

A continuación vamos a analizar los efectos de una perturbación de carácter nominal, que consiste en un aumento en la cantidad de dinero. Como estamos representando nuestra economía en términos de dos variables reales (saldos reales y tipo de cambio real), ya sabemos que a largo plazo el estado estacionario no se va a ver afectado, por lo que la economía comienza y termina en el mismo punto. De hecho, podemos observar que la variable exógena cantidad de dinero no aparece como tal en las ecuaciones que determinan el comportamiento de la economía, si bien aparece en la definición de saldos reales ($l_t = m_t - p_t$). Esto significa que ante el aumento en la cantidad de dinero los saldos reales aumentan en la misma cuantía. Por otra parte, al aumentar la cantidad de dinero, los agentes reajustan al alza sus expectativas sobre el tipo de cambio nominal, por lo que también aumentaría el tipo de cambio real. Estos

efectos aparecen reflejados en la figura 2.38, donde la economía se desplaza desde el estado estacionario inicial a un punto hacia arriba y a la derecha, indicando el aumento instantáneo tanto de los saldos reales como del tipo de cambio real. Es decir, en este caso se produce una ganancia de competitividad exterior vía precios.

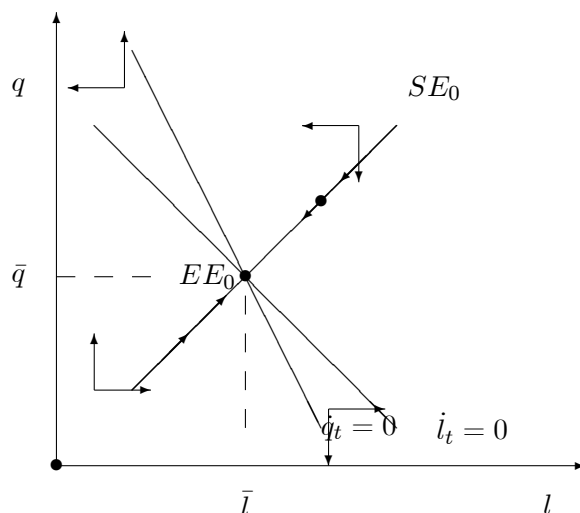


Figura 2.38: Efectos a corto plazo de un aumento en la cantidad de dinero

Estos efectos iniciales del aumento en la cantidad de dinero van desapareciendo con el tiempo. Tal y como muestra la figura 2.39, ahora la economía se movería hacia abajo y a la izquierda. Esto es debido a que dicha perturbación provoca un aumento en el nivel de precios, lo cual hace que disminuyan tanto los saldos reales como el tipo de cambio real. Este proceso va a durar hasta que el aumento de precios sea exactamente de igual magnitud que el aumento en la cantidad de dinero. Por otra parte, dada la paridad del poder adquisitivo, a largo plazo el aumento en la cantidad de dinero y de los precios se va a trasladar en la misma cuantía a un aumento en el tipo de cambio nominal. Por tanto, vamos a llegar a una situación donde tanto los saldos reales como el tipo de cambio real vuelven a su valor inicial. Es decir, esta perturbación permite ganar competitividad exterior vía precios a corto y medio plazo, pero a costa de generar

inflación y de depreciar la moneda nacional, sin que tenga efectos reales en el largo plazo.

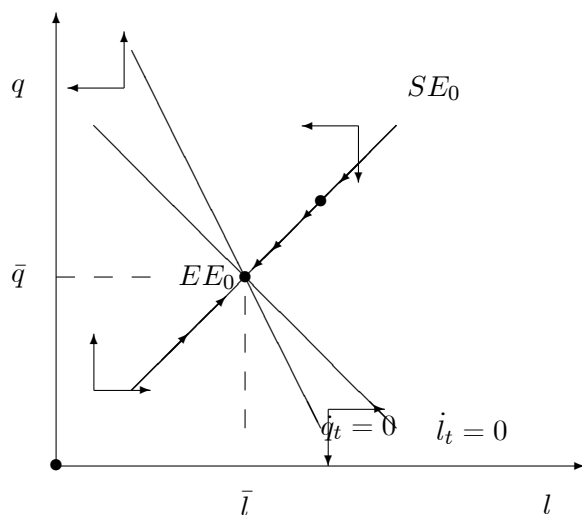


Figura 2.39: Efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero

2.7.3 Combinación de una política monetaria restrictiva con aumento simultáneo en la cantidad de dinero

Una vez hemos analizado las dos perturbaciones anteriores, y comprobado que tienen efectos distintos sobre el nivel de competitividad exterior vía precios de la economía a corto y medio plazo, la pregunta que nos hacemos es si es posible combinar dos perturbaciones de forma simultánea y que los efectos contrarios que tienen sobre el tipo de cambio real se cancelen, de tal forma que no se produzcan efectos negativos sobre la competitividad exterior de la economía cuando se aplica una política monetaria restrictiva. La respuesta es que combinando de forma adecuada la política monetaria restrictiva con aumentos en la cantidad de dinero es posible reducir e incluso eliminar los efectos negativos de dicha política sobre el nivel de competitividad exterior vía precios de una economía.

Para ello vamos a volver a repetir el análisis gráfico, pero considerando que ambas perturbaciones se producen de forma

simultánea, es decir, al mismo tiempo que disminuye la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero se produce un aumento en la cantidad de dinero.

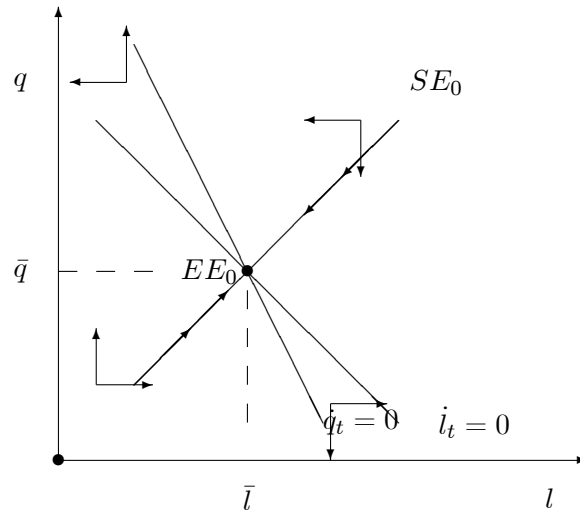


Figura 2.40: Estado estacionario inicial

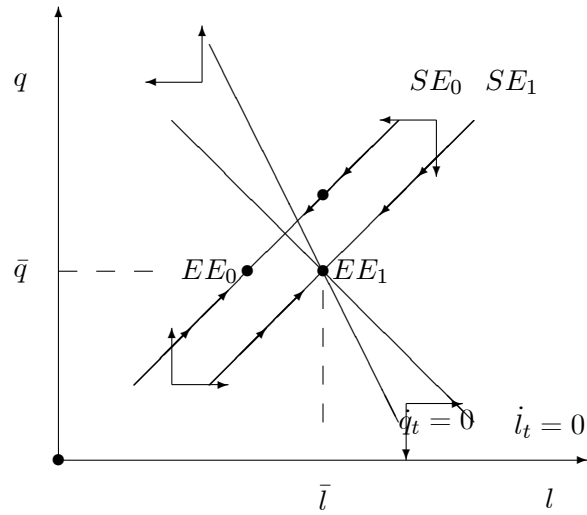


Figura 2.41: Efectos a corto plazo de un aumento en la cantidad de dinero con política monetaria restrictiva

Como podemos apreciar en la figura 2.42, la combinación adecuada de ambas perturbaciones permitiría compensar la disminución en el tipo de cambio real que provoca la política monetaria restrictiva, con el aumento en el tipo de cambio real provocado por el aumento de la cantidad de dinero, de tal forma que a corto y medio plazo, esto es, la transición del estado estacionario inicial al nuevo estado estacionario sea tal que el tipo de cambio real no se vea alterado, manteniendo constante el nivel de competitividad exterior vía precios de la economía, mientras dura el ajuste a la baja del nivel de precios. ¿Cómo sabemos que dicha política ha tenido éxito? Porque los saldos reales en el nuevo estado estacionario son superiores a los existentes inicialmente y esto sólo es posible si disminuye la inflación.

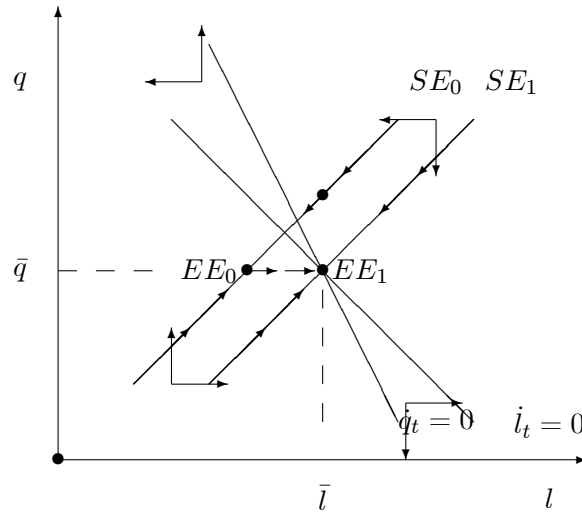


Figura 2.42: Efectos a corto, medio y largo plazo de un aumento en la cantidad de dinero con política monetaria restrictiva

Parte II

**Equilibrio General
Dinámico**

3

La elección intertemporal de los consumidores

3.1. Introducción

3.2. La decisión de consumo en tiempo discreto

3.3. La decisión de consumo en tiempo continuo

3.4. La decisión consumo-ocio

3.5. Extensiones a los supuestos básicos

3.1 Introducción

El modelo que vamos a utilizar para describir el comportamiento de la economía a nivel agregado es un modelo de equilibrio general dinámico, en el cual los resultados se derivan de las decisiones de los diferentes agentes que intervienen en la economía. En este contexto la economía se modeliza en términos del comportamiento de cada uno de los agentes económicos, construyéndose el modelo a partir de las decisiones que toman estos agentes y son estas decisiones las que van a determinar el valor de las distintas variables macroeconómicas. Por tanto, resulta fundamental determinar cómo

es el comportamiento de cada uno de los agentes que intervienen en la economía.

En este capítulo vamos a estudiar el comportamiento del primer agente económico que va a formar parte de nuestro modelo de equilibrio general. Estos agentes son los consumidores o las familias, que van a constituir, a través de sus decisiones, el principal elemento del modelo que vamos a utilizar para explicar el comportamiento de la economía. El dicho popular dice que las tres cosas que dan la felicidad son la salud, el dinero y el amor. De estos tres elementos el que corresponde a la esfera económica es el dinero, no por sí mismo, sino porque con él se pueden comprar cosas que reportan satisfacción.

El análisis del comportamiento de los consumidores va a ser fundamental dentro del esquema del modelo de equilibrio general, al determinar las principales variables del mismo. Así, los consumidores van a decidir qué parte de sus recursos van a destinar al consumo y que parte al ahorro, que se va a transformar en inversión y, por tanto, en capital productivo. Por otra parte, los consumidores van a ser los propietarios de los factores productivos, capital y trabajo, que van a ser utilizados por las empresas para producir los bienes que éstos van a consumir.

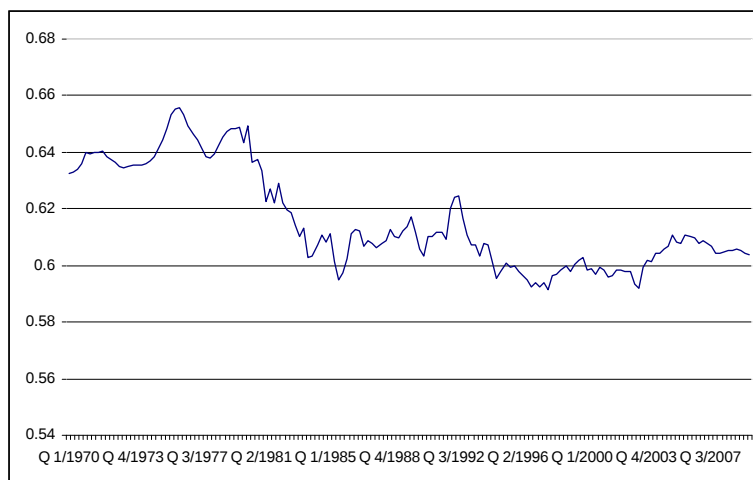


Figura 3.1. Porcentaje del consumo respecto al PIB

La figura 3.1 muestra la evolución del consumo privado en España como porcentaje del PIB. Dicho porcentaje se sitúa en torno al 60 por ciento, siendo el componente más importante, en términos cuantitativos, de la demanda agregada.

Los consumidores tienen como objetivo la maximización de una función objetivo, que vamos a denominar función de utilidad o función de felicidad. La maximización de esta función objetivo está sujeta a una determinada restricción, que denominamos restricción presupuestaria. Dicho problema se resuelve en términos intertemporales, es decir, es un problema dinámico. Así, el objetivo de los consumidores es maximizar la sumatoria descontada de las utilidades a lo largo de todo su ciclo vital. El factor de descuento proviene del hecho que los individuos valoran más la utilidad actual que la utilidad futura.

Un elemento importante a tener en cuenta es definir la vida de los diferentes agentes económicos. Cuando hablamos de la vida de un agente económico nos estamos refiriendo al periodo de tiempo que dicho agente toma como referencia para tomar sus decisiones. Vamos a suponer que tanto las empresas como el gobierno tienen vida infinita. Obviamente, sabemos que la vida de las empresas y de los gobiernos es finita, es decir, van a desaparecer en un momento dado del tiempo. Así, no existe en la actualidad ningún gobierno de los existentes hace 2.000 años ni ninguna empresa de dicha época. Lo que realmente queremos decir es que tanto las empresas como el gobierno toman como referencia un periodo infinito para la toma de sus decisiones. Ningún gobierno piensa que va a dejar de existir en un momento futuro, ni ningún empresario toma decisiones de inversión pensando que su empresa va a quebrar en un determinado momento futuro.

Respecto a los consumidores podemos suponer que pueden tener vida finita o bien vida infinita. Habitualmente, vamos a suponer que los consumidores tienen vida infinita. Si esto nos causa problemas, en lugar de hablar de consumidores podemos hablar de familias. Y si que podemos pensar que la vida de una familia es infinita. Pensad que si vosotros estáis vivos es porque todos vuestros familiares desde hace miles de años han vivido, por lo menos hasta la edad de procrear.

El principal resultado que vamos a obtener de este análisis es que el consumo de un periodo no está restringido por la renta de

dinero periodo. Así, los consumidores establecen un plan óptimo de consumo a lo largo de su vida, es decir, el nivel de consumo de un determinado periodo se decide conjuntamente con los consumos de los periodos futuros. Esto significa que el consumidor puede separar el perfil temporal de su consumo del correspondiente a su renta, a través del ahorro, con el objeto de maximizar su felicidad en términos descontados.

La estructura del tema es la siguiente. En la segunda sección analizamos la decisión de consumo-ahorro del individuo en con tiempo discreto. La sección tercera repite el mismo análisis pero bajo tiempo continuo. La sección cuarta amplía la función de utilidad con el ocio para estudiar la decisión consumo-trabajo de los individuos. La sección quinta introduce algunas extensiones a los supuestos básicos.

3.2 La decisión de consumo en tiempo discreto

En primer lugar, vamos a suponer que el único argumento de la función de utilidad del individuo es el consumo, de tal forma que el objetivo de los consumidores es maximizar la siguiente función de utilidad instantánea, que la definimos como:

$$U(C_t) \tag{3.1}$$

donde $U(\cdot)$ es una función matemática que representa el nivel de felicidad o satisfacción del individuo y C_t es el nivel de consumo en el momento t . Esta función tiene que cumplir unas determinadas características y representa las preferencias del individuo en relación al consumo de bienes y servicios. Así, suponemos que es una función estrictamente creciente, estrictamente cóncava y dos veces diferenciable, tal que:

$$U'(C_t) > 0; \quad U''(C_t) < 0 \tag{3.2}$$

Las características anteriores nos indican que la función de utilidad es creciente en el consumo, es decir, cuanto mayor es el nivel de consumo del individuo mayor es su nivel de felicidad. Por su parte, la función es cóncava, indicando que conforme aumente el consumo la utilidad del individuo aumenta pero cada vez lo hace en menor cuantía. Esto significa que la utilidad marginal del consumidor es

decreciente. Lo que intentamos con estos supuestos es reflejar el comportamiento de los individuos. De hecho, podemos comprobar que estos supuestos son acertados simplemente tomando cervezas. Cuando llevemos digamos 10 cervezas, vamos a darnos cuenta que la satisfacción que nos reporta una cerveza adicional es mucho menor que la satisfacción obtenidas por las primeras cervezas. Esta característica no es exclusiva del ser humano, sino que aparece en la mayoría de seres vivos y es lo que hace que paremos de comer y no reventemos. Quizás el único ser vivo cuya función de utilidad no es cóncava, es decir, con utilidad marginal decreciente, son algunos peces de acuario que comen mientras haya comida, hasta morir de una indigestión.

El problema de los individuos se resuelve en un contexto intertemporal. Los individuos viven un determinado número de periodos. Esto significa que su objetivo es maximizar su nivel de utilidad, no sólo en un determinado momento del tiempo, sino a lo largo de todo su ciclo vital. Por tanto, el problema que resolverían los individuos sería el de maximizar la sumatoria de la utilidad instantánea a lo largo de toda su vida. Sin embargo, hemos de tener en cuenta otra característica del ser humano que va a tener importantes consecuencias económicas. Esta característica hace referencia al hecho de que no valoramos la utilidad por igual en diferentes momentos del tiempo. De hecho, valoramos más la utilidad en el momento actual que la utilidad en cualquier momento futuro, esto es, somos impacientes.

En cuanto a la vida del agente, vamos a suponer inicialmente que es finita. En este contexto, el problema de maximización intertemporal del individuo vendría dado por:

$$\max_{(C_t)} E_t \sum_{t=0}^T \beta^t U(C_t) \quad (3.3)$$

siendo E_t la esperanza matemática en el momento t , condicionada a la información disponible en dicho momento del tiempo y donde β es el factor de descuento intertemporal, $\beta \in (0, 1)$, siendo:

$$\beta = \frac{1}{1 + \theta} \quad (3.4)$$

donde θ es la tasa de preferencia subjetiva intertemporal ($\theta > 0$) y T es el número de periodos de vida del individuo. Este parámetro

nos indica cuanto valora la utilidad futura un individuo en relación a su utilidad actual. Cuanto mayor sea este valor, menor será la valoración del individuo de su utilidad futura respecto a la actual. El hecho de que este parámetro sea positivo obedece a una característica del ser humano, y es que descuenta el futuro. Esto significa que valoramos más la utilidad en el momento actual que la utilidad futura. En realidad la tasa de preferencia subjetiva intertemporal lo que nos está diciendo es la preocupación del individuo por el futuro. Así si θ toma un valor muy bajo cercano a cero, esto indicaría que el individuo se preocupa mucho por el futuro (lo descuenta muy poco), mientras que si el valor de θ es muy elevado esto nos indicaría que el grado de preocupación por el futuro del individuo es muy bajo. Al igual que los individuos pueden tener diferentes grados de preocupación por el futuro, también las sociedades pueden ser muy diferentes en este aspecto, lo que tendrá consecuencias sobre dichas economías.

Así, si suponemos que no existe incertidumbre sobre el valor de las variables futuras, el problema del consumidor resulta en maximizar, en el caso de vida finita, la siguiente sumatoria de utilidades:

$$\max_{(C_t)} U(C_0) + \beta U(C_1) + \beta^2 U(C_2) + \beta^3 U(C_3) + \dots + \beta^T U(C_T) \quad (3.5)$$

La ponderación que le estamos dando en el momento t a las utilidades en los diferentes periodos, por ejemplo, para un $\beta = 0,97$ vendría dada en la figura 3.1. Tal y como podemos comprobar el peso que le damos a la utilidad de cada periodo va disminuyendo conforme nos alejamos en el tiempo, reflejando el hecho de que valoramos más la utilidad en el momento actual que la utilidad en cualquier momento futuro.

Por otra parte, el consumidor va a maximizar su utilidad sujeta a la restricción presupuestaria, que va a establecer cual es el total de recursos disponibles para su gasto a lo largo de la vida del individuo. La restricción presupuestaria en cada periodo del individuo vendría dada por la siguiente expresión:

$$C_t + B_t = W_t + (1 + R_t)B_{t-1} \quad (3.6)$$

donde B_t es el nivel de ahorro en el momento t , W_t es el nivel de renta del individuo (su salario) que suponemos exógeno y R_t es el tipo de

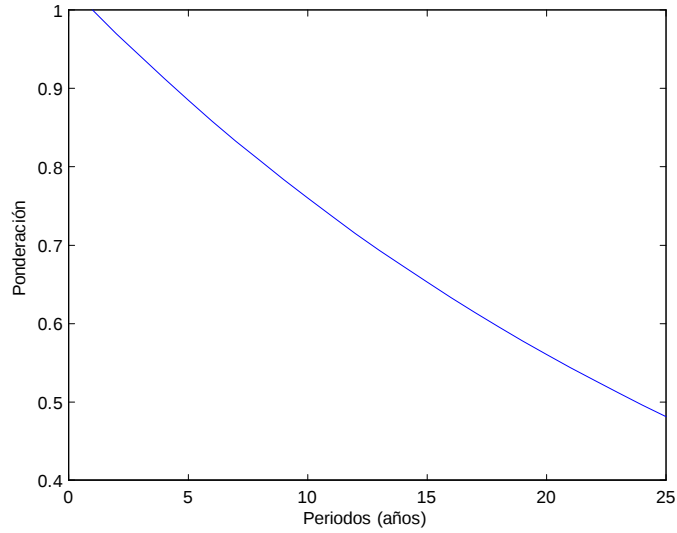


Figura 3.2. Ponderación de la utilidad para $\beta = 0,97$

interés que también vienen dado (estas variables son exógenas y las determinaremos posteriormente). La expresión anterior indica que el gasto total del individuo (la parte izquierda de la ecuación) tiene que ser igual a los ingresos totales (la parte derecha). Los gastos vienen dados por la suma del consumo más el ahorro, $C_t + B_t$, es decir, con los recursos disponibles podemos hacer dos cosas: o los consumimos o los guardamos. Los ingresos totales del individuo, que representa los recursos, vienen dados por su renta (o salario), por el ahorro hasta el periodo anterior y por la rentabilidad de los ahorros.

Para resolver el anterior problema necesitamos dos condiciones adicionales: la cantidad de activos que tiene inicialmente el individuo y la cantidad de activos en el momento final. La cantidad de activos que tiene inicialmente el individuo podemos suponer que es cero o un número positivo:

$$B_0 \geq 0 \quad (3.7)$$

Por su parte, la cantidad de activos que tiene el individuo al final de su ciclo vital suponemos es igual a cero, ya que también estamos suponiendo que la vida del individuo es finita:

$$B_T = 0 \quad (3.8)$$

Esta condición proviene del hecho de que si el consumidor tiene vida finita el máximo nivel de utilidad sólo lo alcanzará si cuando desaparece su nivel de activos es cero, es decir, a lo largo de su ciclo vital ha gastado todo lo que previamente ha ahorrado.

3.2.1 *El problema del consumidor en dos periodos*

En primer lugar vamos a resolver el problema del consumidor suponiendo que únicamente vive dos periodos (periodo 1 y periodo 2). De este modo vamos a ilustrar con un sencillo ejemplo que el consumo no tiene porqué depender de la renta en el caso en que consideremos la existencia de más de un periodo. En este caso la función de utilidad a maximizar es la siguiente:

$$\max_{(C_t)} U(C_1) + \beta U(C_2) \quad (3.9)$$

Suponemos que el individuo obtiene una determinada renta salarial a lo largo de su vida y la existencia de un único tipo de interés, R_t , que es el mismo tanto para ahorrar como para pedir prestado. Por tanto, la restricción presupuestaria del primer periodo sería:

$$C_1 + B_1 = W_1 \quad (3.10)$$

La restricción en el segundo periodo sería:

$$C_2 = (1 + R_t)B_1 + W_2 \quad (3.11)$$

Despejando el ahorro de la restricción presupuestaria del primer periodo (expresión 3.10) y sustituyendo en la restricción presupuestaria del segundo periodo (expresión 3.11) obtenemos que la restricción presupuestaria intertemporal del individuo, esto es, la restricción presupuestaria a lo largo de todo su ciclo vital, evaluada en el periodo 1, es:

$$C_2 = (1 + R_t)(C_1 - W_1) + W_2 \quad (3.12)$$

o equivalentemente:

$$C_1 + \frac{C_2}{1 + R_t} = W_1 + \frac{W_2}{1 + R_t} \quad (3.13)$$

según la calculemos respecto al primer periodo o respecto al segundo periodo.

Tal y como hemos apuntado anteriormente, el problema del consumidor consiste en maximizar la expresión (3.9) sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal. Por tanto definimos el problema del consumidor como:

$$\max_{C_1, C_2} \mathcal{L} = U(C_1) + \beta U(C_2) = \max_{C_1, C_2} U(C_1) + \frac{U(C_2)}{1 + \theta} \quad (3.14)$$

sueto a la restricción presupuestaria definida anteriormente:

$$C_1 + \frac{C_2}{1 + R_t} = W_1 + \frac{W_2}{1 + R_t} \quad (3.15)$$

Podemos resolver este problema construyendo el langragiano:

$$\max_{C_1, C_2} \mathcal{L} = U(C_1) + \frac{U(C_2)}{1 + \theta} - \lambda_t \left(C_1 + \frac{C_2}{1 + R_t} - W_1 - \frac{W_2}{1 + R_t} \right) \quad (3.16)$$

Las condiciones de primer orden serían:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = U'(C_1) - \lambda_t = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = \frac{U'(C_2)}{1 + \theta} - \frac{\lambda}{1 + R_t} = 0 \quad (3.18)$$

La expresión (3.17) nos indica que el parámetro de Lagrange es igual a la utilidad marginal del primer periodo. Este parámetro de Lagrange es un precio sombra y mide cual es la satisfacción que le reporta al consumidor la última unidad consumida en el periodo 1. Por su parte, la expresión (3.18) indica como valora el consumidor en el periodo 1 la satisfacción que le reportaría la última unidad consumida en el periodo 2. En este caso el precio sombra no es igual a la utilidad marginal en dicho periodo, sino que depende de la tasa de descuento intertemporal y del tipo de interés.

Despejando de la primera condición de primer orden (3.17) y sustituyendo en la segunda condición de primer orden (3.18) obtenemos:

$$U'(C_1) = \frac{U'(C_2)(1 + R_t)}{1 + \theta} \quad (3.19)$$

Esta expresión nos indica que el individuo va a elegir un nivel de consumo en cada periodo de su vida tal que la utilidad que le reporta la última unidad consumida en el periodo 1 sea igual a la utilidad que le reporta la última unidad en el periodo 2 poderada por el término $\frac{(1+R_t)}{1+\theta}$ que depende del tipo de interés y de la tasa de preferencia intertemporal. En otras palabras, lo que hace el individuo es comparar la satisfacción que le reporta en los dos periodos el consumo de una unidad, eligiendo consumirla en aquel periodo donde su utilidad sea mayor.

Otra forma de resolver este problema es la siguiente. Despejamos C_2 de la restricción presupuestaria:

$$C_2 = W_1(1 + R_t) + W_2 - C_1(1 + R_t) \quad (3.20)$$

El problema inicial a maximizar dado por:

$$\max_{C_1} \mathcal{L} = U(C_1) + \frac{U(C_2)}{1 + \theta} \quad (3.21)$$

lo reescribiríamos como:

$$\max_{C_1} \mathcal{L} = U(C_1) + \frac{U(W_1(1 + R_t) + W_2 - C_1(1 + R_t))}{1 + \theta} \quad (3.22)$$

Derivando con respecto a C_1 e igualando a cero obtenemos:

$$U'(C_1) - \frac{U'(C_2)(1 + R_t)}{1 + \theta} = 0 \quad (3.23)$$

o equivalentemente:

$$\frac{U'(C_1)}{U'(C_2)} = \frac{1 + R_t}{1 + \theta} \quad (3.24)$$

La figura 3.2 muestra la representación gráfica del anterior problema. El individuo tiene una determinada dotación de ingresos salariales en ambos periodos. Sin embargo su consumo en cada periodo no está restringido por dicha dotación, sino que podemos

mover esa renta a lo largo del tiempo. Es decir, podemos llevarnos renta del presente al futuro (a través del ahorro) y también podemos traernos renta del futuro al presente (a través del endeudamiento). Esto supone que la restricción presupuestaria del individuo no sea la dotación de renta sino que puede ser cualquier combinación tal que se cumpla la restricción presupuestaria intertemporal. De este modo el individuo puede situarse en cualquier punto de la misma en función de sus preferencias de forma independiente a su dotación. Es decir, el nivel de consumo en cada periodo no está restringido por el nivel de renta del mismo. En qué punto se va a situar el individuo. Esta elección depende de tres elementos: la curvatura de la función de utilidad, el tipo de interés real, R_t , y la tasa de preferencia intertemporal, θ .

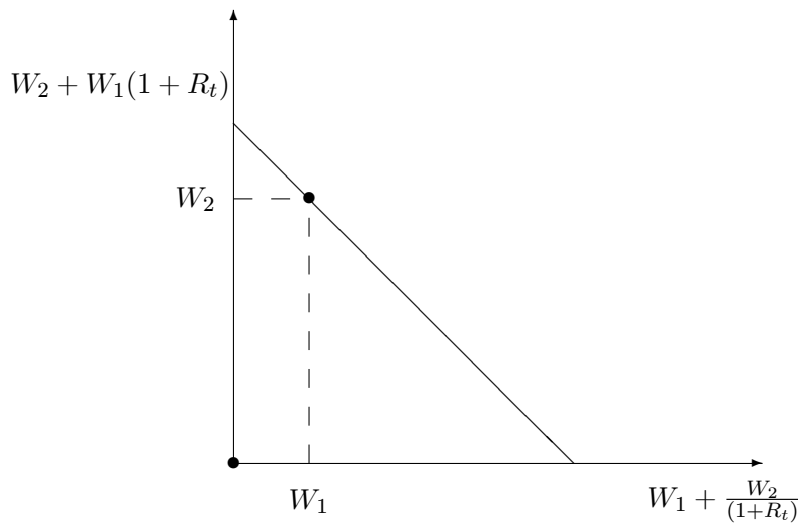


Figura 3.2: La elección intertemporal

3.2.2 El problema del consumidor con vida finita

A continuación vamos a resolver el problema anterior pero suponiendo la existencia de un número finito de periodos. Vamos a comprobar que el resultado que obtenemos es exactamente el mismo. En este caso el problema del consumidor sería:

$$\max_{(C_t)} \sum_{t=0}^T \beta^t U(C_t) \quad (3.25)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + B_t = W_t + (1 + R_t)B_{t-1} \quad (3.26)$$

El lagrangiano correspondiente al anterior problema de definimos como:

$$\mathcal{L} = \max_{(C_t, B_t)} \beta^t \{U(C_t) - \lambda_t(C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1})\} \quad (3.27)$$

A la hora de maximizar el anterior problema hemos de tener en cuenta que la restricción presupuestaria vendría definida para cada periodo y, por tanto, la restricción a la que se enfrenta el consumidor sería:

$$\begin{aligned} & \dots - \beta^t \lambda_t [C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1}] \\ & - \beta^{t+1} \lambda_{t+1} [C_{t+1} + B_{t+1} - W_{t+1} - (1 + R_{t+1})B_t] - \dots \end{aligned}$$

Resolviendo el anterior problema encontramos que las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = U'(C_t) - \lambda_t = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1 + R_{t+1}) = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - W_t - (1 + R_t)B_{t-1} = 0 \quad (3.30)$$

Despejando de la primera condición de primer orden (3.27) y sustituyendo en la segunda (3.28) obtenemos:

$$\beta^t U'(C_t) = \beta^{t+1} U'(C_{t+1}) (1 + R_{t+1}) \quad (3.31)$$

y operando resulta:

$$U'(C_t) = \beta (1 + R_{t+1}) U'(C_{t+1}) \quad (3.32)$$

expresión que es idéntica a la obtenida anteriormente cuando resolvemos el problema del consumidor en dos periodos. De nuevo encontramos que la senda óptima de consumo es aquella tal que la utilidad marginal del consumo de un periodo sea igual a la utilidad marginal del consumo en el periodo siguiente ponderada por el factor $\beta(1 + R_{t+1})$.

3.2.3 Especificación de la función de utilidad

El problema anterior lo hemos resuelto sin especificar la forma exacta de la función de utilidad. A continuación vamos a describir las funciones de utilidad más utilizadas para representar a la función de utilidad en términos del consumo. A esto es a lo que se llama parametrización, que puede ser de gran utilidad en muchas ocasiones, si bien restringe el análisis a una función matemática concreta.

La función CRRA

La función de utilidad del tipo CRRA (Constant Risk Relative Aversion) tienen la siguiente forma:

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (3.33)$$

donde $\sigma > 0$, representa el grado de aversión al riesgo.

Calculando la utilidad marginal y sustituyendo en la solución obtenida anteriormente resulta:

$$U'(C_t) = C_t^{-\sigma}$$

$$U'(C_{t+1}) = C_{t+1}^{-\sigma}$$

Sustituyendo las utilidades marginales del consumo en la solución (3.31) obtenemos que la senda óptima del consumo en este caso sería:

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1 + R_{t+1})C_{t+1}^{-\sigma} \quad (3.34)$$

o equivalentemente:

$$C_{t+1}^{\sigma} = \beta(1 + R_{t+1})C_t^{\sigma} \quad (3.35)$$

La figura 3.2 muestra la forma de la función de utilidad CRRA para un valor de la aversión al riesgo igual a 2 y su comparación con

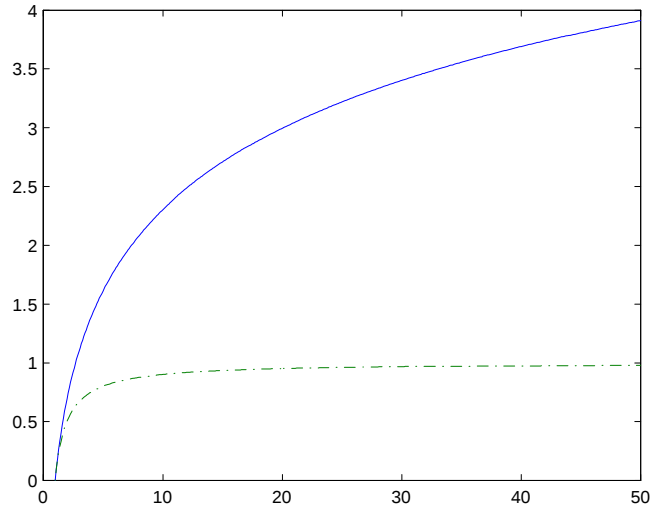


Figura 3.3. Función de utilidad CRRA (— $\sigma = 1$, - - $\sigma = 2$)

la función de utilidad logarítmica, que se corresponde con un valor del parámetro de aversión al riesgo igual a la unidad.

La función CARA

La función de utilidad del tipo CARA (Constant Absolute Risk Aversion) tiene la siguiente forma:

$$U(C_t) = -\frac{1}{\sigma} \exp(-\sigma C_t)$$

En este caso la utilidad marginal vendría dada por:

$$U'(C_t) = \exp(-\sigma C_t)$$

$$U'(C_{t+1}) = \exp(-\sigma C_{t+1})$$

Sustituyendo en la solución resulta:

$$\exp(-\sigma C_t) = \beta(1 + R_{t+1}) \exp(-\sigma C_{t+1}) \quad (3.36)$$

La función logarítmica

La forma funcional más utilizada en la práctica por su sencillez es la función logarítmica, que es un caso particular de la función de utilidad CRRA. Así, si el parámetro de aversión al riesgo es igual a 1, entonces la expresión (3.32) se reduce a¹:

$$U(C_t) = \log C_t$$

De este modo la utilidad marginal del consumo sería:

$$U'(C_t) = \frac{1}{C_t}$$

$$U'(C_{t+1}) = \frac{1}{C_{t+1}}$$

Finalmente, sustituyendo en la solución resulta:

$$C_{t+1} = \beta(1 + R_{t+1})C_t \quad (3.37)$$

3.2.4 El problema del consumidor con incertidumbre

El problema del consumidor que hemos resuelto anteriormente lo hemos hecho en un contexto sin incertidumbre. Por tanto, el individuo conocía el valor de todas las variables en el momento en que tomaba su decisión de consumo. Así, por ejemplo, en el momento en el que el individuo seleccionaba su senda óptima de consumo a lo largo de su ciclo vital conocía cual iba a ser la senda de renta, esto es, conocía cual era su nivel de riqueza global a lo largo de toda su vida.

En esta sección vamos a introducir la incertidumbre. En la realidad nosotros no conocemos cual es nuestro nivel de riqueza global a lo largo de nuestra vida. Pero realizamos estimaciones de la misma, que pueden estar equivocadas. A medida que avanzamos

¹Si tomamos logaritmos en la expresión (3.32) resulta que:

$$\ln U(C_t) = (1 - \sigma) \ln C_t$$

Aplicando la regla de l'Hôpital resulta que:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (1 - \sigma) \ln C_t =$$

en edad tenemos más información sobre nuestra riqueza global, ya que tenemos más información sobre cuales son nuestros ingresos. Conocemos el valor de nuestra riqueza global en el momento en el que nos jubilamos.

En este contexto la riqueza global, Z_t , de un individuo que vive T periodos en el momento t se define como:

$$Z_t = B_{t-1} + W_t + E_t \sum_{j=t+1}^T \frac{W_j}{(1 + R_t)^{j-t}} \quad (3.38)$$

El problema del consumidor sería en este caso la maximización de una sumatoria en términos esperados:

$$\max_{C_t} E_t \sum_{t=0}^T \frac{U(C_t)}{(1 + \theta)^t} \quad (3.39)$$

sujeto a:

$$B_t = (1 + R_t)B_{t-1} + W_t - C_t \quad (3.40)$$

$$B_0 \geq 0 \quad (3.41)$$

$$B_T = 0 \quad (3.42)$$

La introducción de incertidumbre en nuestro análisis implica que el consumidor selecciona un plan óptimo de consumo en cada periodo que puede ser igual o no al seleccionado en el periodo anterior. En $t = 0$, el agente decide los valores:

$$C_0^0, C_1^0, C_2^0, C_3^0, C_4^0, \dots, C_T^0 \quad (3.43)$$

es decir, decide los niveles de consumo en todos los periodos de forma simultánea, donde el superíndice hace referencia al momento del tiempo en que se toma la decisión. En el siguiente periodo, el consumidor vuelve a seleccionar un plan óptimo de consumo, pero ya no puede cambiar el consumo realizado en $t = 0$:

$$C_0^1, C_1^1, C_2^1, C_3^1, C_4^1, \dots, C_T^1 \quad (3.44)$$

Si el conjunto de información disponible por parte del individuo no ha cambiado, la senda óptima de consumo dada por (3.42) es igual

que la dada por (3.40), dado que los valores de consumo seleccionados en el periodo anterior siguen siendo óptimos. Esto es así en el caso en el que el individuo acierte en su estimación realizada en el periodo 0 de la renta que va a obtener en el periodo 1. Sin embargo, si su previsión no es cierta, esto va a provocar un cambio en toda la senda de consumo del individuo. Así, si el individuo se ha equivocado al alza, es decir, obtiene un nivel de salarios superior al esperado, esto supone una revisión al alza de todos sus consumos a lo largo de su ciclo vital.

En el siguiente periodo, el consumidor vuelve a seleccionar un plan óptimo de consumo, pero ya no puede cambiar el consumo realizado en $t = 1$:

$$\mathbf{C}_0^0, \mathbf{C}_1^1, C_2^2, C_3^2, \dots, C_T^2 \quad (3.45)$$

donde la nueva senda óptima de consumo puede ser igual o diferente a la seleccionada en el periodo anterior dependiendo de los errores de predicción que comete el individuo a la hora de anticipar su renta futura. Como podemos comprobar cada vez hay más consumos realizados y menos consumos a realizar en el futuro, sobre los cuales hay que tomar la decisión. En el último periodo de vida del individuo únicamente tiene que decidir sobre el consumo de dicho periodo siendo la información completa.

Para resolver el problema anterior despejamos el consumo de la restricción presupuestaria y lo introducimos en la utilidad a maximizar:

$$\max_{C_t} E_t \sum_{t=j}^T \frac{U((1+R_t)B_{t-1} + W_t - B_t)}{(1+\theta)^{t-j}} \quad (3.46)$$

Derivaríamos respecto a los activos financieros, teniendo en cuenta que B_j aparece en dos momentos del tiempo en t y en $t+1$.

$$\max_{C_t} E_t \left[\frac{\frac{U((1+R_t)B_{t-1} + W_t - B_t)}{(1+\theta)^{t-j}}}{(1+\theta)^{t-j+1}} + \frac{U((1+R_{t+1})B_t + W_{t+1} - B_{t+1})}{(1+\theta)^{t-j+1}} \right]$$

Derivando respecto a la cantidad de activos financieros, la condición de primer orden sería:

$$E_t \left[\frac{\frac{1}{(1+\theta)^{t-j}} \frac{\partial U((1+R_t)B_{t-1} + W_t - B_t)}{\partial B_t}}{(1+\theta)^{t-j+1}} + \frac{\frac{1}{(1+\theta)^{t-j+1}} \frac{\partial U((1+R_{t+1})B_t + W_{t+1} - B_{t+1})}{\partial B_t}}{(1+\theta)^{t-j+1}} \right] = 0$$

o equivalentemente:

$$E_t \left[\frac{1}{(1+\theta)^{t-j}} \frac{\partial U((1+R_t)B_{t-1}+W_t-B_t)}{\partial ((1+R_t)B_{t-1}+W_t-B_t)} (-1) + \frac{1}{(1+\theta)^{t-j+1}} \frac{\partial U((1+R_{t+1})B_t+W_{t+1}-B_{t+1})}{\partial ((1+R_{t+1})B_t+W_{t+1}-B_{t+1})} (1+R_{t+1}) \right] = 0$$

Redefiniendo en términos de la utilidad marginal del consumo alcanzaríamos:

$$E_t \left[-\frac{U'(C_t)}{(1+\theta)^{t-j}} + \frac{U'(C_{t+1})}{(1+\theta)^{t-j+1}} (1+R_{t+1}) \right] = 0$$

$$-\frac{U'(C_t)}{(1+\theta)^{t-j}} + E_t \left[\frac{U'(C_{t+1})}{(1+\theta)^{t-j+1}} \right] (1+R_{t+1}) = 0$$

Operando y reordenando términos resulta:

$$-U'(C_t) + \frac{(1+R_{t+1})}{(1+\theta)} E_t U'(C_{t+1}) = 0$$

$$U'(C_t) = \frac{(1+R_{t+1})}{(1+\theta)} E_t U'(C_{t+1})$$

La solución es la siguiente:

$$U(C_t) = \frac{1+R_t}{1+\theta} E_t(U(C_{t+1}))$$

Si suponemos expectativas racionales el valor esperado de la utilidad marginal del consumo mañana es igual a la utilidad marginal del consumo futura más un error de predicción que es ruido blanco:

$$E_t(U(C_{t+1})) = U(C_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} \quad (3.47)$$

Por tanto obtenemos que:

$$U(C_t) = \frac{1+R_t}{1+\theta} U(C_{t+1}) + \varepsilon_{t+1} \quad (3.48)$$

resultado que es el mismo que obtuvimos anteriormente en un contexto sin incertidumbre, excepto por la existencia de un error aleatorio.

A continuación vamos a realizar un ejercicio para ilustrar un resultado obtenido por Hall en 1978 que ilustra determinadas propiedades del resultado anterior: El consumo actual se explica

únicamente en función de sus valores retardados y por las perturbaciones que recogen la nueva información. Así, vamos a comprobar que si suponemos expectativas racionales el consumo sería un proceso autorregresivo de orden 1, AR(1) o un paseo aleatorio.

Vamos a analizar el caso concreto de la función de utilidad cuadrática:

$$U(C_t) = aC_t - \frac{C_t^2}{2} \quad (3.49)$$

Dada la anterior función de utilidad, podemos calcular que la utilidad marginal en t sería:

$$U'(C_t) = a - C_t$$

Por su parte, la utilidad marginal esperada en $t + 1$ sería (bajo el supuesto de expectativas racionales):

$$E_t(U'(C_{t+1})) = a - C_t + \varepsilon_{t+1}$$

Sustituyendo en la solución general obtenida anteriormente resulta:

$$a - C_t = \frac{1 + R_t}{1 + \theta} [a - C_{t+1} + \varepsilon_{t+1}]$$

Agrupando términos, podemos reescribir la expresión anterior como:

$$C_{t+1} = \alpha + \gamma C_t + \varepsilon_{t+1} \quad (3.50)$$

siendo:

$$\alpha = \frac{a(R_t - \theta)}{1 + R_t}; \quad \gamma = \frac{1 + \theta}{1 + R_t}$$

Como podemos observar si $\theta < R_t$ entonces el parámetro γ sería menor que uno, con lo que obtendríamos un proceso autorregresivo de orden 1. Por el contrario, si $\theta = R_t$ el parámetro γ sería igual a 1, con lo que obtendríamos que el consumo es un paseo aleatorio.

Este resultado, a priori, tiene importantes implicaciones:

- Para predecir el consumo, únicamente necesitamos conocer el consumo en el periodo inmediatamente anterior. Esto podríamos interpretarlo como que el consumo únicamente

depende de él mismo y que, por tanto, sería una variable exógena.

- Los valores pasados de cualquier variable no tienen efectos sobre el consumo.
- El término de perturbación refleja el nivel de consumo no planeado.
- Sólo cambios no esperados influyen en el consumo futuro. Esto implica que las políticas económicas van a tener una efectividad muy limitada, ya que sólo tendrían efectos sobre la economía en el caso en que fuesen no anticipadas por parte de los agentes.

El elemento clave para entender el anterior resultado está en el términos de error. Vamos a suponer que $\theta = R_t$, es decir, suponemos que el consumo es un paseo aleatorio. Usando este proceso estocástico vamos a ver qué papel juega la renta actual, anticipada o no, en el nivel de consumo de un periodo. Para ello vamos a especificar en primer lugar como es la función de consumo que estamos utilizando. La función de consumo que derivamos de los resultados obtenidos anteriormente es la siguiente:

$$C_t = \eta_t E_t Z_t \quad (3.51)$$

donde Z_t representa la riqueza global del individuo a lo largo de su ciclo vital, que la calculamos como:

$$Z_t = B_{t-1} + W_t + E_t \sum_{j=t+1}^T \frac{W_j}{(1 + R_t)^{j-t}} \quad (3.52)$$

y donde el parámetro η_t representa una proporción que depende de los elementos que determinan la senda óptima de consumo (tasa de preferencia intertemporal, tipo de interés real y curvatura de la función de utilidad, Ω):

$$\eta_t = \Upsilon(\theta, R_t, \Omega)$$

La función de consumo derivada anteriormente implica que periodo a periodo el consumo es una determinada proporción de la riqueza global del individuo, donde dicha proporción viene determinada por la senda óptima de consumo. Esta proporción puede

ir variando en el tiempo, en función de los reajustes que se produzcan en la senda óptima de consumo como consecuencia de los errores de predicción. No obstante, vamos a suponer que permanece constante.

Tomando la expectativa en $t - 1$ de la función de consumo obtenemos que:

$$E_{t-1}C_t = E_{t-1}[\eta E_t Z_t] = \eta E_{t-1}Z_t$$

Por tanto, el error de previsión es:

$$\varepsilon_t = C_t - E_{t-1}(C_t) = \eta [E_t Z_t - E_{t-1}Z_t]$$

A partir de los resultados anteriores y sustituyendo el término de error en la expresión (3.50) obtenemos lo que se denomina la función de consumo sorpresa:

$$C_t = \alpha + \beta C_{t-1} + \eta [E_t Z_t - E_{t-1}Z_t] \quad (3.53)$$

donde el consumo depende también de las revisiones que el individuo lleva a cabo periodo a periodo en la estimación de su riqueza global. Dado que la riqueza global del individuo a lo largo de su ciclo vital depende de la corriente de ingresos salariales, vamos a intentar introducir la renta en la función consumo anterior. Para ello suponemos que la renta sigue un paseo aleatorio:

$$W_t = W_{t-1} + v_t \quad (3.54)$$

Las revisiones en las expectativas de la riqueza global del individuo periodo a periodo son iguales al error que comete el individuo a la hora de predecir su renta:

$$E_t Z_t - E_{t-1}Z_t = W_t - E_{t-1}W_t \quad (3.55)$$

Pero dado que estamos suponiendo expectativas racionales:

$$E_{t-1}W_t = W_{t-1} \quad (3.56)$$

Por tanto, resulta que:

$$E_t Z_t - E_{t-1}Z_t = W_t - W_{t-1} \quad (3.57)$$

Por lo que la función de consumo sorpresa la podemos escribir también como:

$$C_t = \alpha + \beta C_{t-1} + \eta [W_t - W_{t-1}] \quad (3.58)$$

que depende de las variaciones no anticipadas en el nivel de renta.

Las principales implicaciones que obtenemos del resultado anterior son las siguientes:

- La renta entra dentro de la función de consumo, pero sólo en términos de las revisiones que realiza el individuo de su renta futura.
- La renta anticipada en $t - 1$ no ejerce ningún efecto sobre el consumo en t , una vez se tiene en cuenta el consumo realizado en el periodo anterior.
- Si no se comenten errores de previsión sobre la renta de un individuo de nuevo obtenemos que el consumo es un paseo aleatorio.
- En la realidad hay incertidumbre, los individuos no conocen su salario a lo largo de la vida, al tiempo que pueden existir sorpresas (le puede tocar la lotería, una herencia de un tío de América, etc.), que hacen que el consumo no sea una variable exógena.

3.3 El problema del consumidor en tiempo continuo

A continuación vamos a resolver el problema del consumidor, pero suponiendo que el tiempo es una variable continua. El resultado que vamos a obtener es el mismo que el obtenido anteriormente, pero ahora la senda óptima de consumo va a ser una ecuación diferencial.

En este caso el problema a maximizar sería la integral de la utilidad en términos descontados. Así, el problema del consumidor en tiempo continuo lo denifimos como maximizar la siguiente función:

$$\max_{C_t} \int_0^T U(C_t) e^{-\theta t} dt \quad (3.59)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\dot{B}_t = R_t B_t + Y_t - C_t \quad (3.60)$$

$$B_0 \geq 0 \quad (3.61)$$

$$B_T = 0 \quad (3.62)$$

donde θ es la tasa subjetiva de preferencia intertemporal, B es la cantidad de activos financieros del individuo. Como podemos observar ahora el problema consiste en maximizar la integral entre 0 y T de la utilidad en términos descontados usando para ello la expresión $e^{-\theta t}$ que es equivalente a β^t . El problema se maximiza sujeto a las tres restricciones definidas anteriormente: la restricción presupuestaria intertemporal y las condiciones de activos financieros iniciales y finales.

La restricción presupuestaria intertemporal del individuo se obtiene como sigue. En primer lugar, la cantidad de activos financieros que tiene un individuo en un determinado momento del tiempo la podemos definir como:

$$B_t = e^{R_t t} \left[\int_0^T B_\tau e^{-R_t \tau} d\tau + B_0 \right] \quad (3.63)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos que:

$$\dot{B}_t = R_t e^{R_t t} \underbrace{\left[\int_0^T B_\tau e^{-R_t \tau} d\tau + B_0 \right]}_{B_t} + e^{R_t t} B_t e^{-R_t t} \quad (3.64)$$

o lo que es lo mismo:

$$\dot{B}_t = R_t B_t + B_t = R_t B_t + Y_t - C_t \quad (3.65)$$

dado que periodo a periodo $B_t = Y_t - C_t$.

Para resolver el problema anterior construimos el valor presente del denominado hamiltoniano (estamos maximizando en tiempo continuo):

$$H(C, B, \lambda) = U(C_t) e^{-\theta t} + \lambda_t (R_t B_t + Y_t - C_t) \quad (3.66)$$

en el cual C es la variable de control, B es la variable de estado y λ es la variable de coestado.

Las condiciones de primer orden (máximo de Pontryagin) son las siguientes:

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial H}{\partial B_t} = -\dot{\lambda}_t \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{B}_t \quad (3.69)$$

es decir, para alcanzar un máximo, la derivada de la función respecto a la variable de control tiene que ser cero mientras que la derivada de la función respecto a la variable de estado debe ser igual al negativo de la derivada respecto al tiempo de la variable de coestado.

Caculando las anteriores condiciones de primer orden del problema del consumidor obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} : U'(C_t)e^{-\theta t} - \lambda_t = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial H}{\partial B_t} : R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} : R_t B_t + Y_t - C_t = \dot{B}_t \quad (3.72)$$

Para resolver operamos de la siguiente forma. En primer lugar, tenemos de despejar el precio sombra del consumo de la condición de primer orden (3.70) y sustituirlo en la condición de primer orden (3.71). Sin embargo, observamos que también necesitamos la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. De la condición de primer orden (3.70) obtenemos que:

$$\lambda_t = U'(C_t)e^{-\theta t} \quad (3.73)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\dot{\lambda}_t = U''(C_t)\dot{C}_t e^{-\theta t} - \theta U'(C_t)e^{-\theta t} \quad (3.74)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la expresión (3.71):

$$R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t$$

resulta:

$$R_t U'(C_t) e^{-\theta t} = -U''(C_t) \dot{C}_t e^{-\theta t} + \theta U'(C_t) e^{-\theta t}$$

$$(R_t - \theta) U'(C_t) e^{-\theta t} = -U''(C_t) \dot{C}_t e^{-\theta t}$$

Reordenando términos obrenemos:

$$\frac{-U''(C_t)}{U'(C_t)} \dot{C}_t = (R_t - \theta) \quad (3.75)$$

La expresión anterior nos dice que a lo largo de la senda óptima del consumo, la tasa a la que decrece la utilidad marginal debe ser igual a la diferencia entre el tipo de interés y la tasa de descuento intertemporal. Para entender el significado de la solución anterior, vamos a definir la curvatura de la función de utilidad. Esta la calculamos como:

$$\Omega = \frac{-U''(C_t)}{U'(C_t)} C_t$$

Introduciendo la definición de curvatura en la solución al problema resulta que la senda temporal óptima del consumo sería:

$$\dot{C}_t = \frac{R_t - \theta}{\Omega} C_t \quad (3.76)$$

A esta ecuación diferencial es a la que se denomina la **Regla Keynes-Ramsey**. Esta ecuación nos dice como se determina la senda óptima de consumo a lo largo del ciclo vital y los factores determinantes de la misma. Así vemos que la decisión de consumo depende de tres elementos, al igual que en el caso discreto: tipo de interés real, tasa de preferencia intertemporal y grado de curvatura de la función de utilidad. Tal y como podemos comprobar si el tipo de interés es superior a la tasa de preferencia temporal entonces la senda de consumo sería creciente en el tiempo. Por el contrario, si el tipo de interés real fuese inferior a la tasa de preferencia intertemporal del individuo, entonces la senda óptima de consumo de dicho individuo tendría pendiente negativa. En el caso en que el tipo de interés real sea igual a la tasa de preferencia temporal la senda óptima de consumo será una línea horizontal ya que el consumo sería el mismo en todos los periodos.

Por otra parte también observamos que la curvatura de la función de utilidad aparece en el denominador. Esto significa que cuanto mayor sea la curvatura de la función de utilidad (cuanto más cóncava) más estable es la senda de consumo. Así, si el grado de curvatura fuese muy elevado, aunque existiesen divergencias entre el tipo de interés real y la tasa de preferencia intertemporal, la senda óptima de consumo sería muy horizontal, ya que el individuo preferiría tener un nivel muy similar de consumo periodo a periodo.

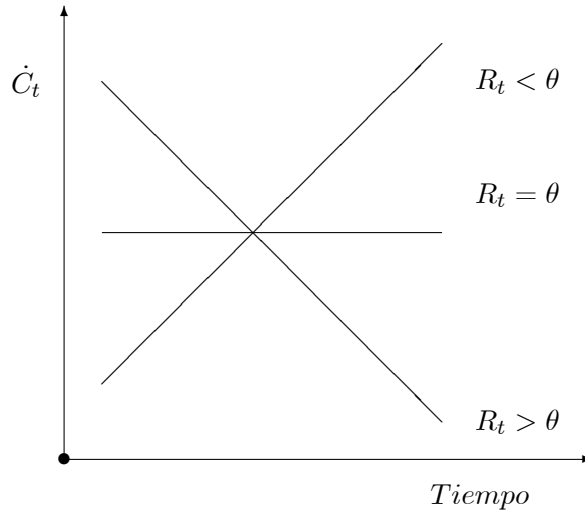


Figura 3.3: Senda óptima de consumo

3.3.1 Un ejemplo: La función CRRA

Vamos a resolver el problema anterior considerando una función de utilidad del tipo CRRA tal que la utilidad viene definida por:

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (3.77)$$

En este caso el hamiltoniano sería el siguiente:

$$H(C, B, \lambda) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} e^{-\theta t} + \lambda_t (R_t B_t + Y_t - C_t) \quad (3.78)$$

Las condiciones de primer orden vendrían dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial C_t} : C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} - \lambda_t = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial H}{\partial B_t} : R_t \lambda_t = -\dot{\lambda}_t \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} : R_t B_t + Y_t - C_t = \dot{B}_t \quad (3.81)$$

Despejando el parámetro de Lagrange de la primera condición de primer orden obtenemos que:

$$\lambda_t = C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} \quad (3.82)$$

Por su parte, derivando respecto al tiempo la anterior expresión obtenemos:

$$\dot{\lambda}_t = -\sigma C_t^{-\sigma-1} \dot{C}_t e^{-\theta t} - \theta C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} \quad (3.83)$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en la condición de primer orden (3.80) obtenemos:

$$R_t C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} = \sigma C_t^{-\sigma-1} \dot{C}_t e^{-\theta t} + \theta C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} \quad (3.84)$$

$$(R_t - \theta) C_t^{-\sigma} e^{-\theta t} = \sigma C_t^{-\sigma-1} \dot{C}_t e^{-\theta t} \quad (3.85)$$

$$(R_t - \theta) = \frac{\sigma C_t^{-\sigma-1} \dot{C}_t}{C_t^{-\sigma}} = \frac{\sigma}{C_t} \dot{C}_t \quad (3.86)$$

Finalmente reordenando términos resulta:

$$\dot{C}_t = \frac{(R_t - \theta)}{\sigma} C_t \quad (3.87)$$

La expresión anterior nos indica que la curvatura de la función de utilidad es precisamente el parámetro de aversión al riesgo. Cuanto mayor sea este parámetro más estable será el consumo entre los diferentes periodos, ya que el individuo no le gusta el cambio. El riesgo nos indica que el individuo prefiere consumir siempre prácticamente lo mismo, ya que su utilidad marginal decrece muy rápidamente conforme aumenta su consumo.

Para comprobar que esta expresión es exactamente igual que la obtenida anteriormente en términos generales, podemos calcular

directamente la primera y la segunda derivada de la forma funcional para la utilidad propuesta anteriormente. Así, la solución general al problema anterior es la siguiente:

$$(R_t - \theta) = \frac{-U''(C_t)}{U'(C_t)} \dot{C}_t \quad (3.88)$$

Calculando la primera y la segunda derivada de la función de utilidad propuesta obtenemos:

$$U'(C_t) = C_t^{-\sigma} \quad (3.89)$$

$$U''(C_t) = -\sigma C_t^{-\sigma-1} \quad (3.90)$$

Sustituyendo en la solución general resulta:

$$(R_t - \theta) = \frac{\sigma C_t^{-\sigma-1}}{C_t^{-\sigma}} \dot{C}_t = \frac{\sigma}{C_t} \dot{C}_t \quad (3.91)$$

y reordenando términos obtenemos:

$$\dot{C}_t = \frac{(R_t - \theta)}{\sigma} C_t \quad (3.92)$$

Tal y como hemos apuntado anteriormente, si $R_t = \theta$, entonces el consumo es constante a lo largo del tiempo. Si $R_t > \theta$, entonces el consumo crece a lo largo del tiempo. Si $R_t < \theta$, entonces el consumo decrece a lo largo del tiempo. Cuanto mayor sea σ más estable es el consumo a lo largo del tiempo.

3.4 La Decisión consumo-ocio

El análisis anterior lo hemos llevado a cabo suponiendo que el consumo es el único elemento que determina el nivel de utilidad de un individuo. Sin embargo, desde el punto de vista económico, hay otros elementos que también afectan a la utilidad del individuo. En este epígrafe vamos a suponer que la utilidad o felicidad depende de dos elementos: Consumo, C , y Ocio, O . El consumo hace referencia a la cantidad de bienes y servicios que consume un individuo mientras que el ocio es la parte del tiempo disponible por el individuo que no dedica a trabajar. Tanto el consumo como el ocio afectan positivamente al nivel de felicidad del individuo. Esto significa que

suponemos que lo que quiere el individuo es trabajar lo menos posible y consumir lo máximo posible.

La función de utilidad instantánea la podemos escribir como:

$$U(C, O) \quad (3.93)$$

La función matemática $U(\cdot)$ tiene que cumplir las siguientes condiciones:

$$U_C > 0, \quad U_O > 0 \quad (3.94)$$

es decir, la primera derivada respecto al consumo y al ocio es positiva. Esto significa que ambas variables tienen un efecto positivo sobre el nivel de felicidad del individuo. Cuanto mayor sea el nivel de consumo, mayor el nivel de utilidad. Cuanto mayor el nivel de ocio, mayor el nivel de utilidad. Por el contrario, la segunda derivada es negativa, tal que:

$$U_{CC} < 0, \quad U_{OO} < 0 \quad (3.95)$$

indicando que la función de utilidad es cóncava. Es decir, a medida que aumenta el consumo el nivel de utilidad aumenta, pero cada vez lo hace en menor proporción. También suponemos que ocurre algo similar con el ocio. Si estamos muy ocupados, una hora adicional de ocio la valoramos en gran medida. Pero si tenemos muy tiempo libre, es claro que una hora adicional de ocio no la vamos a valorar de la misma forma. Por último, la función de utilidad también debe cumplir que:

$$U_{CO} > 0 \quad (3.96)$$

es decir, la derivada cruzada entre consumo y ocio es positiva.

El problema de maximización intertemporal del individuo vendría dado por:

$$Max_{\{C_t, O_t\}_t^\infty} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, O_t) \quad (3.97)$$

donde β es el factor de descuento intertemporal.

Como anteriormente, los consumidores maximizan la suma ponderada de sus utilidades sujetas a la restricción presupuestaria. La restricción presupuestaria intertemporal nos va a indicar tanto

los usos como los recursos disponibles. Los recursos disponibles por parte de los consumidores provienen del alquiler de sus dotaciones. Así, suponemos que los consumidores son los propietarios de los factores productivos de la economía. Estos factores productivos son por un lado el tiempo, a partir del cual va a determinarse la cantidad de trabajo. El segundo factor productivo es el capital, que se genera a través del proceso de ahorro. Dado el precio de los factores productivos, los consumidores van a decidir qué cantidad de factores productivos (cuanto capital y cuanto trabajo) van a alquilar a las empresas.

Por tanto, la introducción del ocio en la función de utilidad permite determinar cual va a ser el nivel de ingresos salariales del individuo, ya que a partir del ocio vamos a derivar la oferta de trabajo del individuo. En este caso, el individuo no sólo decide cual va a ser su nivel de consumo periodo a periodo, sino que también determina cuantas horas va a dedicar a trabajar.

3.4.1 La decisión de consumo-ocio con trabajo y sin capital

En primer lugar, vamos a resolver la decisión de consumo-ocio de los individuos suponiendo que no existe capital. Esto significa que únicamente consideramos como factor productivo al factor trabajo. Al no existir capital tampoco hay ahorro, por lo que los únicos ingresos que puede obtener nuestro agente son los salariales. Por otra parte, al no existir ahorro el nivel de consumo en cada periodo viene determinado por la renta que obtiene el individuo en dicho periodo.

Vamos a parametrizar la función de utilidad para obtener soluciones explícitas. Tenemos una gran variedad de funciones de utilidad que cumplen las condiciones anteriores, si bien la más simple y más utilizada es la función logarítmica. En concreto, vamos a utilizar la siguiente:

$$U(C_t, O_t) = \gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t), \quad (3.98)$$

donde $\gamma \in (0, 1)$, representa la proporción de consumo sobre la renta total, N_t es la población (suponemos que todos son trabajadores o bien es la población entre 16 años y 65 años, es decir, la población totalmente activa), $\bar{H}$ es el número total de horas efectivas disponibles (16 horas al día x 6 días a la semana x 52 semanas al

año, dado que suponemos que necesitamos 8 horas para dormir): 4.992 horas, multiplicado por la población en edad de trabajar, dado que estamos suponiendo que toda la población son trabajadores, $\bar{H} = \bar{h}N_t$ y L_t es el número total de horas dedicadas a trabajar.

La tabla 3.1 muestra la evolución del número de horas trabajadas por trabajador y año a lo largo del tiempo. A mediados del siglo XXI el número de horas por año oscilaba entre 3.100 y 3.600 en Estados Unidos y el Reino Unido. Esto supone, sin contar ninguna semana de vacaciones y una jornada de 6 días a la semana, en torno a 10-12 horas de trabajo diario. Por el contrario, al principio del siglo XX el número de horas había disminuido por debajo de las 2.000 en Estados Unidos, lo que supone una jornada laboral de 6,25 horas (sin vacaciones y trabajando los sábados). A principios del presente siglo XXI, por ejemplo, en Alemania el número de horas trabajadas por año era de 1.362, lo que supone una jornada laboral de 4,4 horas diarias. Como podemos observar, con el paso del tiempo el número de horas dedicadas a trabajar ha ido disminuyendo de forma permanente, por lo que el tiempo de ocio ha ido aumentando en la función de utilidad de los individuos. Esto significa, que al margen del consumo, nuestro nivel de felicidad ha aumentado con el paso del tiempo ya que hemos de dedicar menos horas a trabajar.

Tabla 3.1: Horas trabajadas anuales a lo largo del tiempo

Periodo	País	Horas/año
1840	Trabajador medio UK	3.105-3.588
1850	Trabajador medio US	3.150-3.650
1987	Trabajador medio US	1.949
1988	Trabajador industria UK	1.855
2000	Trabajador medio Alemania	1.362

La tabla 3.2 realiza una comparación a nivel internacional respecto al número de horas trabajadas así como su porcentaje sobre el tiempo total disponible. Podemos apreciar importantes diferencias entre países. Así, en los países más desarrollados de Europa, el porcentaje es inferior al 30%, llegando en algunos países como Suecia y Holanda a suponer sólo el 26% del tiempo disponible. Por el contrario, países como Polonia, República Checa, Japón, Grecia o Estados Unidos, tienen un porcentaje muy elevado que casi supone el 40%. Explicar estas importantes diferencias no es una tarea

sencilla, máxime cuando nos encontramos con economías ricas en las cuales el número de horas trabajadas es muy diferente y países en los cuales el número de horas trabajadas es muy elevado pero presentan diferencias en producción muy significativas.

Tabla 3.2: Horas trabajadas anuales por trabajador en diferentes países

Horas trabajadas anuales. OCDE (2004)		
País	Horas/año	%$\bar{H}$
Corea	2.390	0,48
Polonia	1.984	0,40
República Checa	1.882	0,38
Japón	1.828	0,37
Grecia	1.811	0,36
USA	1.777	0,36
Nueva Zelanda	1.767	0,35
España	1.745	0,35
Canadá	1.717	0,34
Portugal	1.675	0,34
UK	1.552	0,33
Irlanda	1.541	0,31
Italia	1.523	0,31
Dinamarca	1.423	0,29
Alemania	1.362	0,27
Francia	1.346	0,27
Suecia	1.316	0,26
Holanda	1.309	0,26

La figura 3.5 muestra el número de horas trabajadas por trabajador en España desde 1980 hasta 2004. En 1980 las horas trabajadas por año se situaban en torno a 2.000, iniciándose una rápida disminución de las mismas durante la década de los ochenta, hasta situarse por debajo de las 1.850 horas. A partir de este momento el número de horas trabajadas por trabajador y año se ha mantenido prácticamente constante. No obstante, España sigue siendo uno de los países de la OCDE con una jornada laboral más larga, principalmente si lo comparamos con el resto de países europeos. En cualquier caso, si atendemos a parámetros históricos,



Figura 3.4. Evolución temporal de las horas trabajadas/año en España

es de esperar que el tiempo de trabajo continúe disminuyendo en el futuro.

Volviendo a nuestro análisis, el problema a maximizar sería:

$$\max_{(C_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t)] \quad (3.99)$$

sujeto a la restricción presupuesta intertemporal:

$$C_t = W_t L_t \quad (3.100)$$

donde W_t es el salario. En este caso, los ingresos salariales son iguales al consumo, es decir, el individuo gasta todos sus recursos, no existiendo el ahorro. Por tanto, no existe ningún elemento dinámico en el modelo, ya que el consumo en cada periodo de tiempo es igual a la renta de dicho periodo. No obstante, este ejercicio tiene interés en el hecho de que dicho nivel de consumo depende de los ingresos salariales del individuo, por lo que están condicionados por su oferta de trabajo. Nótese que es un precio relativo expresado en unidades

de consumo (suponemos que se produce un único bien y su precio lo normalizamos a 1).

Para resolver este problema, construimos el Lagrangiano:

$$\max_{\{C_t, L_t\}_t^\infty} \mathcal{L} = \beta^t \{ [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t)] - \lambda_t [C_t - W_t L_t] \} \quad (3.101)$$

Calculando las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} : \frac{\gamma}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} : \frac{1 - \gamma}{N_t \bar{H} - L_t} - \lambda_t W_t = 0 \quad (3.103)$$

De la condición de primer orden (3.102) resulta que:

$$\lambda_t = \frac{\gamma}{C_t}$$

esto es, el parámetro de lagrange es el precio sombra de la última unidad consumida, siendo equivalente a la utilidad marginal del individuo tal y como obtenemos en el problema sin ocio.

Por su parte la condición de primer orden (3.103) nos dice que:

$$\lambda_t = \frac{1 - \gamma}{(N_t \bar{H} - L_t) W_t}$$

Condición que iguala el ratio de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad adicional de ocio:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{C_t}{N_t \bar{H} - L_t} = W_t$$

De la restricción presupuestaria obtenemos que el consumo es igual a los ingresos salariales, por lo que quedaría:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{W_t L_t}{N_t \bar{H} - L_t} = W_t$$

Despejando llegaríamos a:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{L_t}{N_t \bar{H} - L_t} = 1$$

Despejando obtenemos que:

$$L_t = \gamma N_t \bar{H} \quad (3.104)$$

es decir, el tiempo de trabajo es una proporción del tiempo discrecional disponible por parte del individuo. Esta proporción viene dada por el parámetro γ . Cuanto mayor sea este parámetro mayor será el tiempo que el individuo dedique a trabajar. Recordemos que este parámetro representa a la proporción del consumo sobre la renta total de individuo. Cuanto mayor sea esta proporción mayor es la cantidad de horas que el individuo dedica a trabajar.

En la tabla 3.2 mostramos el número de horas dedicadas a trabajar para un determinado grupo de países, así como la proporción sobre el total de horas disponibles. Este porcentaje sería una calibración del parámetro γ .

3.4.2 La decisión de consumo-ocio con trabajo y con capital

A continuación vamos a introducir el capital en nuestro análisis, es decir, consideramos el ahorro y por tanto la posibilidad de que el consumo en un periodo no esté restringido por la renta salarial de dicho periodo. Consideramos una economía en la que existe un gran número de consumidores, con idénticas preferencias, representadas por la siguiente función de utilidad instantánea:

$$U(C_t, N_t \bar{H} - L_t) = \gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t) \quad (3.105)$$

donde C_t representa al consumo privado en bienes y servicios en el momento t . El ocio se define como $N_t \bar{H} - L_t$, es decir, la población en edad de tomar decisiones de ocio y trabajo, N_t , por el número de horas efectivas al año, $\bar{H}$, menos las horas dedicadas a trabajar, L_t . Suponemos que las horas efectivas al año, son aquellas disponibles para realizar decisiones de ocio y trabajo, es decir, exceptuando las horas dedicadas a dormir. El parámetro γ ($0 < \gamma < 1$) nos indica la proporción del consumo sobre el ingreso total.

El stock de capital se mueve de acuerdo con:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \quad (3.106)$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital y donde I_t es la inversión bruta.

El problema al que se enfrentan las familias consiste en maximizar el valor de su utilidad:

$$Max_{\{C_t, L_t\}_t^\infty} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t)] \quad (3.107)$$

sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal del consumidor representativo que viene dada por:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t \quad (3.108)$$

dado K_0 , el stock de capital privado inicial y donde $\beta \in (0, 1)$, es el factor de descuento de los consumidores, K_t es el stock de capital, W_t es el precio relativo del factor trabajo (el salario real) y R_t es el precio relativo del factor capital (el tipo de interés real). La restricción presupuestaria nos indica que el consumo más la inversión no pueden exceder la suma de las rentas provenientes del trabajo y de capital.

A la hora de maximizar el anterior problema hemos de tener en cuenta que la restricción presupuestaria vendría definida para cada periodo y, por tanto, la restricción a la que se enfrenta el consumidor sería

$$\begin{aligned} & \dots - \beta^t \lambda_t [C_t + K_{t+1} - K_t - W_t L_t - (R_t - \delta) K_t] \\ & - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} [C_{t-1} + K_t - W_{t-1} L_{t-1} - (R_{t-1} + 1 - \delta) K_{t-1}] - \dots \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema de las familias vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} : \beta^t \left[\gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t \right] = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} : -\beta^t \left[(1 - \gamma) \frac{1}{N_t \bar{H} - L_t} + \lambda_t W_t \right] = 0 \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} : \beta^t \lambda_{t+1} [R_{t+1} + 1 - \delta] - \lambda_t \beta^{t-1} = 0 \quad (3.111)$$

donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asignado a la restricción presupuestaria en el momento t . Despejando el parámetro de Lagrange, obtenemos:

$$\lambda_t = \gamma \frac{1}{C_t} \quad (3.112)$$

Combinando las ecuaciones (3.109) y (3.110) obtenemos la condición que iguala la desutilidad marginal de una hora adicional de trabajo con la utilidad marginal de los ingresos derivados de dicha hora trabajada:

$$(1 - \gamma) \frac{1}{N_t \bar{H} - L_t} = \gamma \frac{1}{C_t} W_t \quad (3.113)$$

Combinando la ecuación (3.109) con la ecuación (3.111) obtenemos la condición de primer orden intertemporal,

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta [R_{t+1} + 1 - \delta] \quad (3.114)$$

que nos indica cual es la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo. Por tanto, la solución del problema de elección del consumidor se resuelve en términos de una ecuación estática que determina el número de horas trabajadas por el individuo (la oferta de trabajo) y una ecuación dinámica que nos dice como es la senda de consumo o, equivalentemente, como son las decisiones de ahorro/inversión del individuo.

3.5 Extensiones a los supuestos básicos

Los resultados obtenidos anteriormente están sujetos a un conjunto de supuestos que en algunos casos son demasiados restrictivos y que pueden ser alterados dando lugar a resultados diferentes. ¿Qué sucede en la realidad? La evidencia empírica muestra la existencia de desviaciones respecto al comportamiento descrito para el consumo. Empíricamente se obtienen dos hechos que contradicen algunos de los resultados obtenidos anteriormente. Estos hechos son:

- La existencia de un exceso de sensibilidad del consumo respecto a la renta. En los resultados obtenidos anteriormente el consumo de un periodo no depende de la renta de dicho periodo. Sin embargo, los datos parecen indicar cierta relación entre ambas variables lo que contradice los resultados obtenidos anteriormente.

- La existencia de un exceso de suavidad del consumo respecto a las innovaciones en la renta. Así, cuando se producen innovaciones en la renta, no parece que la senda de consumo se reajuste tal y como predice el análisis realizado.

El exceso de sensibilidad del consumo respecto a la renta hace referencia al hecho de que la renta contemporánea influye en el consumo. Los resultados obtenidos muestran que el consumo de un periodo es totalmente independiente de la renta de dicho periodo. Sin embargo, en la realizar podemos encontrar situaciones en la que una importante proporción de agentes muestran una elevada relación entre su consumo y su renta periodo a periodo.

Por su parte, también existe cierta evidencia empírica que apunta a la existencia de un exceso de suavidad del consumo respecto a las innovaciones en la renta. Los niveles de consumo reaccionan muy poco ante sorpresas o innovaciones en la renta.

La causa de estas desviaciones hay que buscarla en los supuestos de partida de nuestro análisis y en el no cumplimiento de alguno(s) de ellos. Estos supuestos son fundamentalmente los siguientes:

- Los individuos son optimizadores.
- Mercados de capitales perfectos.
- Preferencias aditivamente separables.
- El ahorro es sólo una variable de estado.

3.5.1 *Individuos optimizadores*

Uno de los supuestos fundamentales de nuestro análisis es que los individuos son optimizadores lo que implica que son racionales. Es decir, suponemos que los individuos inconscientemente resuelven los problemas del consumidor tal y como lo hemos planteado anteriormente. Sin embargo, algunos comportamientos de los individuos son irracionales. Así, por ejemplo, los individuos somos muy impacientes a corto plazo y muy pacientes a largo plazo, lo cual tiene poco sentido.

Si los individuos no son racionales, entonces se producirían desviaciones respecto al comportamiento descrito anteriormente. No obstante, toda la economía actual está basada en este supuesto.

No obstante, aunque los individuos fuesen racionales, puede que la incertidumbre sobre su riqueza global y la complejidad del problema a resolver, lleven a decisiones que no son óptimas.

3.5.2 *Mercados de capitales perfectos*

Quizás el supuesto que genera más dudas es el de mercados de capitales perfectos. Este supuesto implica que los individuos pueden mover libremente su renta a lo largo del tiempo, fundamentalmente desde el futuro al presente. Así, en la realidad nos encontramos con que no existe ninguna restricción para mover dinero del presente al futuro. Basta con no consumir toda la renta y ahorrar. Pero no ocurre lo mismo si queremos mover dinero del futuro al presente. En este caso la situación es más complicada. Así algunos individuos se enfrentan a restricciones de liquidez (restricciones de crédito) por lo que no pueden llevar a cabo el consumo que desearían. Es decir, los mercados de capitales no son perfectos, ya que puede existir una proporción de la población que no tenga posibilidades de endeudarse. Obviamente en este caso el consumo en cada periodo estaría restringido por la renta de dicho periodo. De este modo la existencia de restricciones a la liquidez explicaría el exceso de sensibilidad.

Las restricciones al crédito van a afectar fundamentalmente a aquella parte de la población que tiene unas rentas bajas, que son precisamente aquellos que tienen una capacidad de ahorro también baja. Esto hace que sus niveles de consumo no puedan desviarse mucho de sus niveles de renta periodo a periodo. Si estas restricciones afectan a una gran parte de la economía los resultados anteriores no serían válidos.

3.5.3 *Preferencias aditivamente separables*

Otro de los supuestos que hemos realizado es que las preferencias son aditivamente separables. Este supuesto significa que podemos sumar las utilidades instantáneas y lo hemos realizado para simplificar el problema. Así, la utilidad del individuo en un determinado periodo únicamente depende del consumo realizado en dicho periodo, sin que se vea afectada por consumos realizados en periodos anteriores. Sin embargo, en la realidad las preferencias pueden ser no aditivamente separables. Así, otra característica que presentan los individuos es

que sus decisiones de consumo tienen un cierto grado de persistencia. Esto es lo que se denomina en economía hábitos de consumo. Estos hábitos de consumo suponen la existencia de cierta resistencia al cambio cuando se producen cambios en el entorno. Así, por ejemplo, cuando se produce una variación brusca de la renta, esta variación no se traslada inmediatamente al consumo, sino que el ajuste que se produce es gradual. Esto se debe a que cuando estamos habituados a un determinado nivel de consumo, el individuo tiene cierta inercia a mantenerlo, aunque su riqueza global se haya alterado. Esto explicaría el exceso de suavidad del consumo ante cambios no anticipados en la renta.

3.5.4 El ahorro es sólo una variable de estado

En el problema del consumidor hemos supuesto que el ahorro es una variable de estado, que el individuo utiliza para separar su senda de consumo de la correspondiente a la renta. El ahorro es exclusivamente un instrumento para alcanzar la senda óptima de consumo y maximizar la utilidad. Sin embargo, en la realidad pueden existir otros motivos para las decisiones de ahorro del individuo. Así, disponemos de evidencia acerca de la existencia de ahorro por motivo precaución, que tiene su origen en la incertidumbre sobre el futuro. Esto también explicaría el exceso de suavidad del consumo ante variaciones no anticipadas en la renta.

4

Las empresas y la decisión de inversión

- 4.1. Introducción
- 4.2. La empresa representativa
- 4.3. La maximización de beneficios intertemporal
- 4.4. Costes de ajuste de la inversión
- 4.5. La Q de Tobin
- 4.6. Análisis de perturbaciones

4.1 Introducción

El segundo agente económico que vamos a considerar son las empresas, que representan al sector productivo de la economía, es decir, son los agentes que van a producir los bienes que se van a consumir. Para ello van a utilizar una determinada cantidad de factores productivos, a los cuales van a aplicar una determinada función de tecnología, que permite la transformación de factores productivos en bienes de consumo. En el esquema clásico de análisis, las empresas alquilan los factores productivos a las familias, que

suponemos son los propietarios de los mismos. Consideramos la existencia de dos tipos de factores productivos: el capital y el trabajo. El capital surge como consecuencia de las decisiones de ahorro de los consumidores. Tal y como hemos visto los consumidores utilizan el ahorro para suavizar su senda de consumo. Este ahorro suponemos que se transforma directamente en capital físico, que van a alquilar las empresas para utilizarlo en su proceso productivo. Por otra parte, el trabajo surge de la dotación de tiempo de los consumidores. Los consumidores disponen de una dotación de tiempo que pueden utilizarla bien para actividades de ocio o bien para trabajar. Este tiempo de trabajo es el que se alquila a las empresas.

Suponemos que las empresas tienen como función objetivo la maximización de beneficios, sujeto a la restricción tecnológica. Así, el comportamiento de las empresas lo vamos a representar a través de un problema de optimización en el que se determina un vector de factores productivos, dados unos precios de los mismos, y a través de la función tecnológica, el nivel de producción.

Un elemento clave que vamos a analizar en este tema es la inversión. Junto con el consumo, la inversión es la otra variable fundamental de un sistema económico. Tal y como hemos visto anteriormente, los consumidores determinan el nivel de ahorro, que posteriormente se va a transformar en inversión. La inversión es importante dado que determina tanto el nivel de empleo como las posibilidades de crecimiento de la economía. En el análisis clásico las empresas no son propietarias del capital cuyo proceso de acumulación viene determinado por el ahorro, que es el instrumento que utilizan los consumidores para determinar su senda óptima de consumo. En este sentido, el ahorro simplemente es la producción no consumida, por lo que las decisiones de inversión se derivan directamente de las decisiones de ahorro. Esto hace que no podamos definir de forma adecuada una función de inversión ni definir cuáles son sus determinantes.

En este tema vamos a analizar la inversión desde el punto de vista de las empresas. Así, cuando hablamos de la inversión tenemos dos posibilidades. Podemos suponer que los consumidores son los propietarios del capital, por lo que en este caso las decisiones de inversión son equivalentes a las decisiones de ahorro. Esta es la aproximación que utilizamos habitualmente, en la que el stock de capital viene determinado por la decisión de ahorro de los

consumidores. Por otra parte, podemos suponer que las empresas son propietarias de su capital. En este caso distinguiríamos entre consumidores, por un lado, y empresarios, por el otro, siendo estos últimos los propietarios de las empresas y, por tanto, del capital y los que toman las decisiones de inversión. Utilizando esta especificación alternativa podemos separar la decisión de ahorro de la decisión de inversión y, así obtener la demanda de inversión.

En el modelo neoclásico, el stock de capital óptimo se determina en función de los cambios en los precios relativos de los factores productivos. Sin embargo, vamos a ampliar este análisis básico considerando la existencia de costes de ajuste asociados a los procesos de inversión. A partir de este análisis vamos a desarrollar el modelo de la Q de Tobin, que va a constituir el marco de referencia que vamos a utilizar para describir las decisiones de inversión en una economía. En el modelo de la Q de Tobin la tasa de inversión óptima depende de una ratio denominada Q , definida como el cociente entre el valor de mercado de la empresa y el coste de reposición del capital instalado. El modelo resultante va a consistir en un sistema de dos ecuaciones diferenciales, que determinan el comportamiento de la ratio anterior y del stock de capital.

4.2 La empresa representativa

Al igual que hemos hecho en el caso del consumidor, vamos a suponer que todas las empresas son idénticas, por lo que podemos usar el concepto de empresa representativa. La función objetivo de las empresas consiste en la maximización de los beneficios. Así pues, las empresas van a tomar decisiones de inversión tal que sus beneficios sean máximos. El análisis lo realizamos suponiendo un entorno competitivo.

4.2.1 La función de tecnología

Función de producción agregada o de la empresa representativa viene dada por la expresión:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (4.1)$$

donde Y_t es la producción agregada de la economía o de la empresa representativa, K_t es el stock de capital físico, L_t es el nivel de

empleo y F es una función que convierte factores productivos en producción y que representa a la tecnología que se aplica en el proceso productivo. Esta función tecnológica cumple las siguientes propiedades:

$$F_K > 0, \quad F_L > 0$$

$$F_{KK} < 0, \quad F_{LL} < 0$$

$$F_{KL} > 0$$

es decir, la función es creciente respecto a ambos factores productivos. Si aumentamos la cantidad del factor productivo trabajo o la cantidad del factor productivo capital, la producción aumenta. Por su parte, la segunda derivada respecto a cada uno de los factores productivos es negativa indicando que la función de producción es cóncava respecto a cada factor productivo, indicando que la productividad marginal es decreciente. A medida que aumentamos la cantidad de un factor productivo la producción aumenta pero cada vez lo hace en menor proporción.

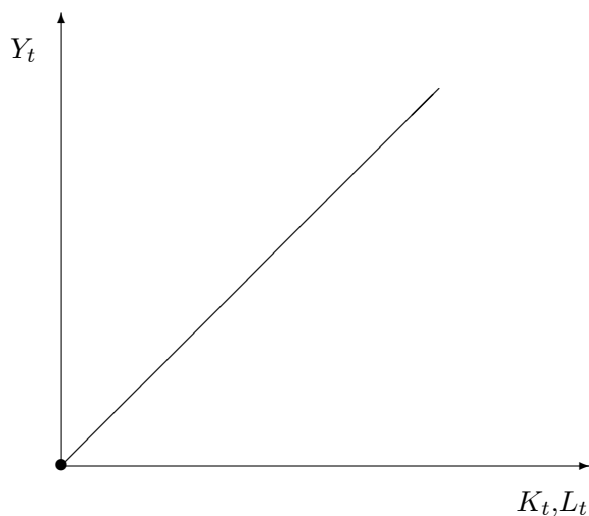


Figura 4.1. Función de producción con rendimientos constantes a escala

La figura 4.1 muestra la forma de la función de producción en términos de los dos factores productivos, siendo una función lineal en términos de ambos factores, es decir, si aumentamos en una determinada cantidad ambos factores productivos, la producción aumenta de forma proporcional.

Por último, la función de producción cumple las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 0} F_K &= \infty, & \lim_{K \rightarrow \infty} F_K &= 0 \\ \lim_{L \rightarrow 0} F_L &= \infty, & \lim_{L \rightarrow \infty} F_L &= 0 \end{aligned}$$

que implican que si la cantidad de un factor productivo tiende a cero, su productividad marginal tiende a infinito, mientras que si la cantidad de factores productivos tiende a infinito su productividad tiende a cero. También suponemos que para producir hacen falta ambos factores productivos, es decir, $F(0, L_t) = F(K_t, 0) = 0$.

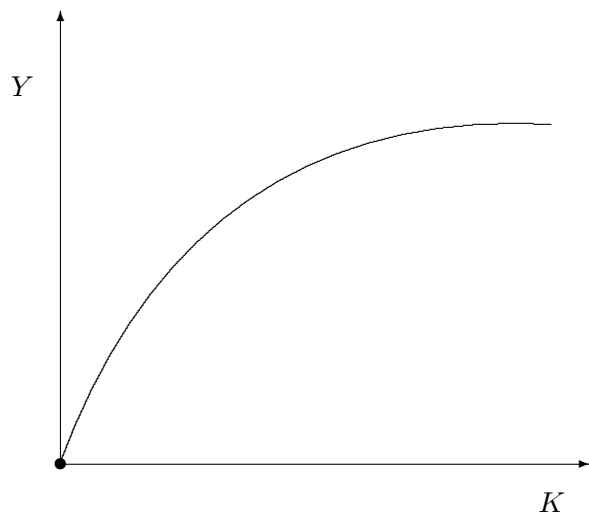


Figura 4.2. Función de producción respecto al factor productivo capital

Un ejemplo: La función de producción Cobb-Douglas. Una función de producción ampliamente utilizada en la práctica es la

denominada función de producción Cobb-Douglas, que la definimos como

$$F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (4.2)$$

donde α es la elasticidad del nivel de producción respecto al capital. También la podemos interpretar como la participación de las rentas de capital en la renta total. $1 - \alpha$ sería la participación de las rentas laborales en la renta total. Como podemos observar la anterior función de producción presenta rendimientos constantes a escala, dado que la suma de los exponentes es uno, y rendimientos decrecientes respecto a cada uno de los factores productivos, dado que cada exponente es inferior a la unidad.

Un ejemplo: La función de producción CES (Constant Elasticity of Substitution). Otra función ampliamente utilizada es la denominada función CES que tiene la siguiente forma:

$$F(K_t, L_t) = [\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \quad (4.3)$$

donde ρ es un parámetro que determina la elasticidad de sustitución entre ambos factores productivos. La elasticidad de sustitución entre ambos factores productivos la definiríamos como $\varepsilon = 1/(1 - \rho)$. Si $\rho = 0$, entonces la función de producción anterior (expresión 4.3) se transforma en una función del tipo Cobb-Douglas (expresión 4.2)¹, es decir, la función de producción del tipo Cobb-Douglas tienen una elasticidad de sustitución unitaria.

4.2.2 La maximización de beneficios

El objetivo de la empresa es la maximización de beneficios. Los beneficios los definimos como la diferencia entre los ingresos totales de la empresa y los costes totales de la misma:

¹Si tomamos logaritmos en la expresión (4.3) resulta que:

$$\ln(Y_t) = \frac{1}{\rho} [\ln(\alpha K_t^\rho + (1 - \alpha)L_t^\rho)]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital resulta que:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln(Y_t) = \alpha \ln K_t + (1 - \alpha) \ln L_t$$

y aplicando la función exponencial llegamos a la función de producción dada por (4.2).

$$\Pi_t = IT_t - CT_t \quad (4.4)$$

donde Π son los beneficios, IT son los ingresos totales y CT son los costes totales. Los ingresos totales vendrían dados por la cantidad producida multiplicada por el precio. Dado que el precio lo hemos normalizado a 1, esto significa que los ingresos totales son equivalentes a la producción. Por su parte, los costes totales vienen dados por los costes de los factores productivos trabajo y capital, calculados como la retribución a cada factor productivo multiplicado por la cantidad de factor.

En términos generales, el problema de maximización de beneficios de la empresa también es intertemporal, al igual que en el caso del consumidor. En este caso la empresa maximizaría el valor presente de los beneficios. La tasa de actualización sería el tipo de interés real. Sin embargo, el resultado sería el mismo que si el problema fuese estático. Por tanto, en primer lugar vamos a resolver el problema de la empresa como si fuese un agente que únicamente vive un periodo.

El problema de maximización de la empresa representativa sería:

$$\max \Pi_t = Y_t - W_t L_t - R_t K_t \quad (4.5)$$

sujeto a la restricción tecnológica:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (4.6)$$

Si suponemos rendimientos constantes a escala y mercados competitivos entonces vamos a encontrar que la maximización de beneficios implica que éstos van a ser cero, $\Pi_t = 0$.

Calculando las condiciones de primer orden del anterior problema obtenemos:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = F_K(K_t, L_t) - R_t = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = F_L(K_t, L_t) - W_t = 0 \quad (4.8)$$

De las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios obtenemos que el precio relativo de los factores es igual a su productividad marginal. Así, obtenemos que la productividad marginal del capital va a ser igual al tipo de interés mientras que

la productividad marginal del trabajo va a ser igual al salario (real, dado que hemos normalizados los precios a 1).

Si suponemos que la función de producción es el tipo Cobb-Douglas, el problema a resolver es:

$$\max \Pi_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - W_t L_t - R_t K_t$$

Calculando las condiciones de primer orden obtenemos que:

$$\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - R_t = 0$$

$$(1 - \alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha} - W_t = 0$$

O escrito de otro modo:

$$R_t = \frac{\alpha K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t}$$

$$W_t = \frac{(1 - \alpha) K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t}$$

es decir, la producción total se distribuye como retribución a ambos factores productivos. Así, la retribución al factor productivo capital, dada por $R_t K_t$, es una proporción α de la producción total, mientras que la retribución al factor productivo trabajo, dada por $W_t L_t$, es una proporción $1 - \alpha$ de la producción.

Si calculamos la segunda derivada respecto a cada factor productivo podemos comprobar que las productividades marginales son decrecientes:

$$\begin{aligned} F_{KK} &= (\alpha - 1) \alpha K_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha} < 0 \\ F_{LL} &= -\alpha(1 - \alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha-1} < 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, también podemos comprobar que los beneficios son nulos. Para ello, definimos los beneficios de la empresa dada la tecnología, tal que:

$$\Pi_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - R_t K_t - W_t L_t$$

Sustituyendo el precio de los factores productivos obtenidos anteriormente resulta que:

$$\Pi_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - (1-\alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha} = 0$$

por lo que los beneficios son cero. Es decir, los factores productivos son pagados exactamente por lo que aportan a la producción, dado que el precio de cada uno de ellos es igual a su productividad marginal.

Combinando las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}}{(1-\alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha}} = \frac{R_t}{W_t}$$

$$\frac{\alpha Y_t L_t}{(1-\alpha) Y_t K_t} = \frac{R_t}{W_t}$$

y reordenando términos resulta

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)} = \frac{R_t K_t}{W_t L_t}$$

que implica que la relación entre la retribución al factor productivo capital respecto a la retribución al factor productivo trabajo es una constante. Esto significa que la retribución que obtiene cada factor productivo sobre la renta total que genera la economía se mantiene constante en el tiempo.

4.3 La maximización de beneficios intertemporal

A continuación vamos a resolver el problema de las empresas pero en un contexto intertemporal. Así, las empresas tienen como objetivo maximizar la corriente de beneficios tanto presentes como futuros, dado que su ciclo vital es superior a un periodo. Sin embargo, vamos a comprobar que resolver el problema de la empresa en términos dinámicos da el mismo resultado que resolviendo el problema para un sólo periodo, tal y como hemos hecho anteriormente.

Si suponemos que el tiempo es una variable continua, el problema de maximización de beneficios intertemporales vendría dado por:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-R_t t} \Pi_t dt \quad (4.9)$$

sujeta a:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (4.10)$$

siendo el factor de descuento el tipo de interés real.

Vamos a definir los beneficios de la empresas como:

$$\Pi_t = P_t Y_t - W_t L_t - P_t^K K_t \quad (4.11)$$

donde P_t^K es el precio del capital. El precio del capital es el coste de cada unidad de capital. Por otra parte, normalizamos el precio de los bienes a 1, ($P = 1$). Sin embargo, vamos a introducir una diferencia respecto al análisis anterior, ya que vamos a suponer que la empresa compra el capital en lugar de alquilarlo periodo a periodo. Esto significa que el capital es propiedad de la empresa y lo que decide la empresa es como cambia dicho capital, es decir, la inversión. De este modo lo que decide la empresa realmente es su volumen de inversión periodo a periodo, que lo definimos como:

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t \quad (4.12)$$

es decir, la inversión (bruta) es igual a la variación del stock de capital más lo que se deprecia el capital, donde δ es la tasa de depreciación física del capital.

En este caso estamos haciendo una distinción entre las familias o consumidores y los empresarios. Los empresarios son los propietarios de las empresas de la economía y, por tanto, del stock de capital de éstas. De este modo las decisiones de inversión van a ser diferentes a las decisiones de ahorro. Dado que el stock de capital es el resultado de las decisiones de inversión, la decisión respecto a este factor productivo corresponde al volumen de inversión que deciden realizar cada periodo o los empresarios. En este caso tenemos, dado que son los propietarios del capital, que el coste en cada momento del tiempo del factor productivo capital es la inversión bruta que se realiza.

Por tanto, los beneficios de la empresa los definimos como:

$$\Pi_t = Y_t - W_t L_t - P_t^K I_t \quad (4.13)$$

donde podemos observar que ahora los costes de producción asociados al capital son aquellos asociados a la inversión que realiza la empresa en cada periodo ya que el stock de capital existente en dicho momento ya es propiedad de la empresa y no tiene que pagarlo de nuevo.

Por tanto, el supuesto que hagamos sobre quién tiene la propiedad del capital da lugar a diferentes definiciones de los beneficios de la empresa.

El problema a maximizar sería:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-R_t t} [Y_t - W_t L_t - P_t^K I_t] dt \quad (4.14)$$

sujeta a:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (4.15)$$

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t \quad (4.16)$$

Sustituyendo las restricciones en la función objetivo obtenemos la siguiente expresión:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-R_t t} [F(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K (\dot{K}_t + \delta K_t)] dt \quad (4.17)$$

Nótese que en dicha expresión aparece la derivada respecto al tiempo del stock de capital. Calculando las condiciones de primer orden (condiciones de Euler) resulta que:

$$V_K - \frac{\partial V}{\partial \dot{K}} = e^{-R_t t} [F_K(K_t, L_t) - P_t^K \delta] - R_t P_t^K e^{-R_t t} = 0$$

$$V_L - \frac{\partial V}{\partial L} = V_L = F_L(K_t, L_t) - W_t = 0$$

De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$e^{-R_t t} [F_K(K_t, L_t) - P_t^K \delta] - R_t P_t^K e^{-R_t t} = 0$$

Operando resulta que:

$$F_K(K_t, L_t) - P_t^K \delta = R_t P_t^K$$

O equivalentemente,

$$F_K(K_t, L_t) = P_t^K(R_t + \delta)$$

Esta expresión iguala el valor del producto marginal del capital, $P_t F_K(K_t, L_t)$, con el coste de uso del capital, $P_t^K(R_t + \delta)$, que está compuesto por tres componentes: el precio del capital, el tipo de interés real y la tasa de depreciación física del capital.

De la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$F_L(K_t, L_t) - W_t = 0$$

y despejando llegamos a:

$$F_L(K_t, L_t) = W_t$$

Esta expresión iguala el valor del producto marginal del trabajo, $P_t F_L(K_t, L_t)$, con el coste salarial, W_t . Tal y como podemos observar, los resultados son exactamente los mismos que los obtenidos en el caso estático. Por tanto, no hay ninguna variable intertemporal en el análisis realizado, dado que la empresa maximiza beneficios periodo a periodo seleccionando en cada periodo la cantidad de trabajo y la cantidad de capital óptima, sin que estas decisiones afecten a los beneficios futuros.

Por tanto, el stock de capital óptimo, $\bar{K}$, es una función del coste de uso del capital y del coste salarial:

$$\bar{K} = K(P_t^K(R_t + \delta), W_t)$$

Una vez determinado el stock de capital óptimo, la empresa lo compara con el existente: Si $\bar{K} = K$, las empresas no cambian el stock de capital, siendo la inversión neta nula, pero con una inversión bruta positiva para reponer el capital que se deprecia. Si $\bar{K} > K$, la inversión neta sería positiva. Si $\bar{K} < K$, la inversión neta sería negativa. Sin embargo, los resultados anteriores sólo serían correctos si el proceso de ajuste del capital existente al óptimo fuese instantáneo. Esto no es así en la realidad, sino que el capital es una variable que está sujeto a unos costes

4.4 Costes de ajuste de la inversión

Uno de los problemas que presenta el análisis anterior es que suponemos que no existe ningún tipo de restricción a que el stock de

capital varíe de forma instantánea. Sin embargo, el stock de capital de las empresas es una variable que presenta una gran cantidad de rigideces lo que provoca que su ajuste no sea tan rápido. En la realidad, las empresas se enfrentan a unos costes de ajuste al alterar su stock de capital. En esta sección vamos a introducir la existencia de costes de ajuste en el proceso de inversión. Estos costes de ajuste son mayores cuanto más rápidamente la empresa pretenda ajustar su capital. Podemos distinguir entre dos tipos de costes de ajuste:

- Costes de ajuste externos.
- Costes de ajuste internos.

Los costes de ajuste externos surgen cuando las empresas se enfrentan a una oferta de capital perfectamente elástica. Sin embargo, en la realidad se puede disponer de bienes de capital a diferentes velocidades. Esto va a provocar que el precio del capital depende del tiempo en que se quiera disponer de él. Cuanto más rápidamente sea, mayor será su precio. Los costes de ajuste internos se miden en términos de pérdidas de producción. Cuando se incorpora nuevo capital hay que destinar parte de los recursos productivos de la empresa a su instalación. Estos recursos no están transitoriamente disponibles para producir, por lo que se produce una pérdida de beneficios.

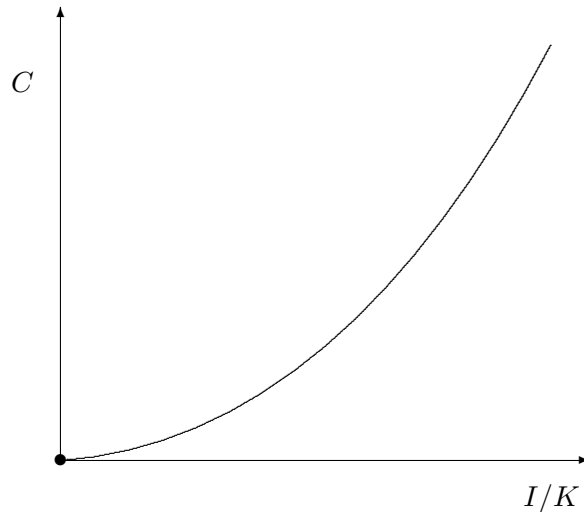


Figura 4.3. Costes de ajuste del proceso de inversión

Vamos a definir la siguiente función de costes de ajuste:

$$C = C(I_t, K_t) \quad (4.18)$$

donde los costes de ajuste dependen del volumen de inversión y del stock de capital instalado. Esta función de coste cumple una serie de características, tal que:

$$\begin{aligned} C(0, K_t) &= 0, & C(I_t, 0) &= 0 \\ C_I(I_t, K_t) &> 0, & C_K(I_t, K_t) &> 0 \\ C_{II}(I_t, K_t) &> 0, & C_{KK}(I_t, K_t) &> 0 \end{aligned}$$

es decir, los costes de ajuste dependen positivamente de la inversión y del stock de capital. Por otra parte su derivada es positiva, indicando que crecen de forma más que proporcional, es decir, es una función creciente y convexa.

La existencia de costes de ajuste significa una pérdida de capital o un coste adicional, en el proceso de inversión. Así, por cada euro invertido, se va a transformar en capital una cantidad inferior al euro, debido a la existencia de estos costes de ajuste. La cantidad de capital que llega a la empresa por unidad invertida la definimos como:

$$\Psi(I_t, K_t) = I_t - C(I_t, K_t) \quad (4.19)$$

donde la función de inversión neta de costes de ajuste depende tanto del volumen de inversión como del stock de capital. En este caso, la ecuación dinámica de acumulación del stock de capital la podemos definir como:

$$\dot{K}_t = \Psi(I_t, K_t) - \delta K_t \quad (4.20)$$

Vamos a resolver de nuevo el problema de maximización de beneficios pero teniendo en cuenta los costes de ajuste. En este caso la función a maximizar sería:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-R_t t} [Y_t - W_t L_t - P_t^K I_t] dt \quad (4.21)$$

sujeta a:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (4.22)$$

$$I_t = C(I_t, K_t) + \dot{K}_t + \delta K_t \quad (4.23)$$

El anterior problema lo podemos reescribir como:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} \left(e^{-R_t t} [F(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K I_t] - \lambda_t [\dot{K}_t - \Psi(I_t, K_t) + \delta K_t] \right) dt \quad (4.24)$$

Calculando las condiciones de primer orden (condiciones de Euler) resulta que:

$$V_K - \frac{\partial V_{\dot{K}}}{\partial t} = e^{-R_t t} F_K(K_t, L_t) + \lambda_t (\Psi_K(I_t, K_t) - \delta) + \dot{\lambda}_t = 0$$

$$V_I - \frac{\partial V_{\dot{I}}}{\partial t} = V_I = -e^{-R_t t} P_t^K + \lambda_t \Psi_I(I_t, K_t) = 0$$

$$V_L - \frac{\partial V_{\dot{L}}}{\partial t} = V_L = F_L(K_t, L_t) - W_t = 0$$

A partir de la segunda condición de primer orden obtenemos que:

$$\lambda_t = \frac{P_t^K e^{-R_t t}}{\Psi_I(I_t, K_t)}$$

Derivando respecto al tiempo resulta que:

$$\dot{\lambda}_t = \frac{-R_t P_t^K e^{-R_t t}}{\Psi_I(I_t, K_t)}$$

Sustituyendo el precio sombra del capital y su derivada respecto al tiempo en la condición de primer orden respecto al capital resulta que:

$$F_K(K_t, L_t) + \frac{P_t^K}{\Psi_I(I_t, K_t)} (\Psi_K(I_t, K_t) - \delta) = \frac{R_t P_t^K}{\Psi_I(I_t, K_t)}$$

Finalmente, despejando la productividad marginal del capital obtenemos:

$$F_K(K_t, L_t) = \frac{P_t^K(R_t + \delta) - P_t^K \Psi_K(I_t, K_t)}{\Psi_I(I_t, K_t)}$$

La expresión anterior nos indica que ahora la productividad marginal del capital es igual a una expresión en la que aparece el coste de uso del capital pero también la función de inversión neta de costes de ajuste. Así, si no existiesen costes de ajuste entonces $\Psi_I(I_t, K_t) = 1$ y $\Psi_K(I_t, K_t) = 0$, por lo que la condición de equilibrio sería la obtenida en el apartado anterior. Con costes de ajuste el coste de uso del capital es inferior dependiendo de cómo sean los costes de ajuste en función del stock de capital y de cómo sean los costes de ajuste en función del volumen de inversión. Cuanto menor sea $\Psi_I(I_t, K_t)$ mayor tiene que ser la productividad marginal del capital, es decir, menor el stock de capital. Esto hace que aunque el stock de capital de una empresa en un periodo sea inferior al óptimo, la empresa no realice una inversión en dicho periodo para cubrir totalmente dicha diferencia, ya que el coste de ajuste puede ser muy importante, llevando a cabo sus inversiones de forma gradual en el tiempo.

Ejemplo de función de costes de ajuste: Los costes de ajuste pueden tener una gran variedad de formas funcionales. Una forma funcional para los costes de ajuste habitualmente utilizada es la siguiente:

$$C(I_t, K_t) = \frac{\omega}{2} \frac{(I_t - \delta K_t)^2}{K_t} \quad (4.25)$$

representando la existencia de unos costes de ajuste cuadráticos y donde $\omega > 0$ es un parámetro que determina dichos costes. Esto significa que:

$$\Psi(I_t, K_t) = I_t - \frac{\omega}{2} \frac{(I_t - \delta K_t)^2}{K_t} \quad (4.26)$$

En este caso concreto tendríamos que:

$$\Psi_I(I_t, K_t) = 1 - \omega \frac{I_t - \delta K_t}{K_t}$$

$$\Psi_K(I_t, K_t) = \omega \frac{(I_t - \delta K_t) \delta}{K_t} + \frac{\omega}{2} \left(\frac{I_t - \delta K_t}{K_t} \right)^2$$

4.5 La Q de Tobin

En esta sección vamos a estudiar el modelo de referencia que se utiliza para analizar los factores determinantes de la inversión. Se trata del denominado modelo de la Q de Tobin, desarrollado por Tobin en los años 60 y que ha sido muy utilizado para analizar el comportamiento de las empresas en relación a la inversión. Este modelo está basado en definir una ratio, que se denomina la Q de Tobin, que se construye como el valor de mercado de la empresa respecto al coste de reposición del capital instalado. Es decir, compara lo que vale la empresa en un momento del tiempo respecto a lo que constaría instalar de nuevo todo el capital del que dispone la empresa. De este modo esta ratio contiene todos los elementos que afectan a las decisiones de inversión de las empresas, incluyendo las expectativas de los agentes sobre la corriente de beneficios futuros.

Para resolver el problema planteado anteriormente, en primer lugar, lo reescribimos como:

$$\begin{aligned} \max V = & \int_{t=0}^{\infty} e^{-R_t t} [F(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K I_t] dt + \\ & \int_{t=0}^{\infty} \lambda_t [\Psi(I_t, K_t) - \delta K_t] dt - \int_{t=0}^{\infty} \lambda_t \dot{K}_t dt \end{aligned}$$

A continuación, realizamos la siguiente transformación del último término de la expresión anterior, tal que:

$$\int_0^{\infty} \lambda_t \dot{K}_t dt = - \int_0^{\infty} \dot{\lambda}_t K_t dt + \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t K_t - \lambda_0 K_0$$

El término $\lambda_0 K_0$ representa la condición inicial de la que parte la empresa en términos del valor del stock de capital en el momento en el que se crea, que es una constante y que por tanto podemos eliminar ya que no afecta al problema de maximización. En segundo

lugar, aparece un valor en el límite que es a lo que se denomina condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t K_t = 0$$

y que garantiza que si el stock de capital es muy grande, su precio sombra tiende a cero y viceversa. Eliminando estos componentes, dado que uno es cero y el otro es una constante, y sustituyendo la expresión anterior, el problema quedaría como:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} \left(e^{-R_t t} [F(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K I_t] + \dot{\lambda}_t K_t + \lambda_t [\Psi(I_t, K_t) - \delta K_t] \right) dt$$

A continuación definimos la ratio Q de Tobin. Esta ratio se calcularía como el valor de mercado de la empresa respecto al coste de reposición del capital instalado. En nuestro caso concreto vamos a definir dicha ratio en términos marginales, a lo que vamos a denominar q . Es decir, la ratio q sería la variación en el valor de mercado de la empresa respecto a la variación en el coste de reposición del capital instalado, es decir, el coste de invertir una unidad adicional. Bajo determinados supuestos la ratio q es igual que la media de la ratio Q . La ratio q la definimos como el valor actualizado del precio sombra del capital, tal que:

$$q_t = \lambda_t e^{R_t t} \quad (4.27)$$

Por tanto, tenemos que el precio sombra del capital lo podemos definir como:

$$\lambda_t = \frac{q_t}{e^{R_t t}} \quad (4.28)$$

siendo su derivada respecto al tiempo:

$$\dot{\lambda}_t = \frac{-R_t q_t + \dot{q}_t}{e^{R_t t}} \quad (4.29)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en nuestro problema obtendríamos:

$$\max V = \int_{t=0}^{\infty} \left(e^{-R_t t} [F(K_t, L_t) - W_t L_t - P_t^K I_t] + K_t e^{-R_t t} (-R_t q_t + \dot{q}_t) + e^{-R_t t} q_t [\Psi(I_t, K_t) - \delta K_t] \right) dt \quad (4.30)$$

Ahora calcularíamos las condiciones de primer orden, teniendo en cuenta que la decisión de la empresa es triple: empleo, stock de capital e inversión. Las condiciones de primer orden del problema vendrían dadas por:

$$\frac{\partial V}{\partial L_t} = F_L(K_t, L_t) - W_t = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial V}{\partial I_t} = q_t \Psi_I(K_t, I_t) - P_t^K = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K_t} = \dot{q}_t - q_t[(R_t + \delta) - \Psi_K(K_t, I_t)] - F_K(K_t, L_t) = 0 \quad (4.33)$$

Prescindiendo de la condición de equilibrio para el empleo, las otras dos condiciones de primer orden (respecto a la inversión y al capital) son dos ecuaciones diferenciales que constituyen el sistema de ecuaciones de nuestra economía. La expresión (4.32) es la ecuación que nos va a indicar como es la dinámica del stock de capital a lo largo del tiempo. Así, la derivada de la función objetivo respecto a la inversión daría como resultado la ecuación dinámica del stock de capital que la escribimos como:

$$\dot{K}_t = q_t \Psi_I(K_t, I_t) - P_t^K \quad (4.34)$$

Por su parte, la derivada de la función objetivo respecto al stock de capital daría lugar a la ecuación dinámica para la ratio q :

$$\dot{q}_t = q_t[(R_t + \delta) - \Psi_K(K_t, I_t)] - F_K(K_t, L_t) \quad (4.35)$$

El estado estacionario de nuestra economía vendría dado por aquella situación en la cual las dos ecuaciones anteriores fuesen nulas:

$$\begin{bmatrix} \dot{K}_t \\ \dot{q}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Por tanto, el modelo de la Q de Tobin se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, que determinan la dinámica del stock de capital y de la ratio q . La diferencia respecto a los sistemas dinámicos que estudiamos en los temas 1 y 2 es que ahora tenemos ecuaciones no lineales. El hecho de que se trate de un sistema de ecuaciones no lineales hace que no podamos obtener de forma directa su representación matricial. Para ello deberíamos usar algún método de linearización.

La ratio q sintetiza toda la información relevante para la empresa a la hora de tomar sus decisiones de inversión. Esto significa que una teoría de la inversión es simplemente una teoría sobre la q de la empresa. El stock de capital de la empresa va a depender del valor de la ratio q , que a su vez depende de dicho stock de capital. Este sistema de ecuaciones nos dice que la empresa aumentará su stock de capital siempre que una unidad monetaria invertida incremente el valor de la empresa en, al menos, una unidad.

De la condición de equilibrio dinámica parcial para el stock de capital obtenemos que:

$$\dot{K}_t = 0 \implies q_t = \frac{P_t^K}{\Psi_I(K_t, I_t)} \quad (4.37)$$

Si suponemos que $P_t^K = 1$, entonces $\dot{K}_t = 0$, lo que implica que $q_t = 1$. Esto significa que para que el stock de capital permanezca constante en el tiempo la ratio q tiene que ser igual a 1. En efecto, si la empresa no invierte, entonces no existen costes de ajuste por lo que $\Psi_I(K_t, I_t)$ sería igual a la unidad.

Por otra parte, la condición de equilibrio dinámica parcial para la inversión viene dada por la expresión:

$$\dot{q}_t = 0 \implies q_t[(R_t + \delta) - \Psi_K(K_t, I_t)] = F_K(K_t, L_t) \quad (4.38)$$

que contiene, en principio, dos elementos no lineales, provenientes de la productividad marginal del capital y de los costes de ajuste respecto al stock de capital.

A continuación vamos a representar gráficamente las condiciones de equilibrio dinámicas con objeto de tener una visión más clara del significado del modelo. La condición de equilibrio dinámica parcial para el stock de capital es:

$$\dot{K}_t = 0 \implies q_t = \frac{P_t^K}{\Psi_I(K_t, I_t)} \quad (4.39)$$

Si suponemos que $P_t^K = 1$, entonces el equilibrio parcial en términos del stock de capital, $\dot{K}_t = 0$, se obtiene cuanto q_t se iguala a 1, ya que en este caso $\Psi_I(K_t, I_t)$ es también igual a la unidad, es decir, los costes de ajuste del capital en función del volumen de inversión son cero, $C_I(K_t, 0) = 0$. Esto significa que el valor de equilibrio para la ratio q es igual al precio del capital.

Si calculmos la pendiente de la condición de equilibrio del stock de capital, obtenemos que es cero:

$$\frac{\partial q_t}{\partial K_t} \big|_{\dot{K}_t=0} = \frac{0}{\Psi_I(K_t, I_t)} = 0 \quad (4.40)$$

es decir, la condición de equilibrio dinámica para el stock de capital no depende del stock de capital y únicamente dependel de la ratio q . La represetación gráfica de esta condición de equilibrio dinámica aparece en la figura 4.4. Puntos situados por encima de esta condición de equilibrio parcial implican que la ecuación dinámica del stock de capital es positiva, por lo que el stock de capital aumenta. Esto es debido a que la ratio q es superior a su valor de equilibrio, indicando que el coste de incorporar una unidad adicional de capital a la empresa es inferior al aumento en el valor de mercado de la misma. Por el contrario, si nos encontramos en una situación por debajo de dicha condición de equilibrio parcial entonces la ratio q es inferior a la de equilibrio. En este caso, la ecuación dinámica para el stock de capital es negativa, indicando que el coste de una unidad adicional de capital es inferior al aumento que produciría en el valor de mercado de la empresa.

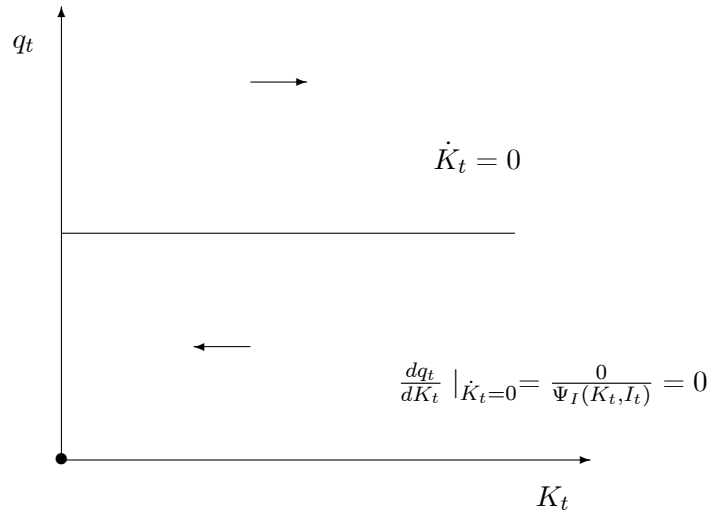


Figura 4.4: Condición dinámica de equilibrio parcial del stock de capital.

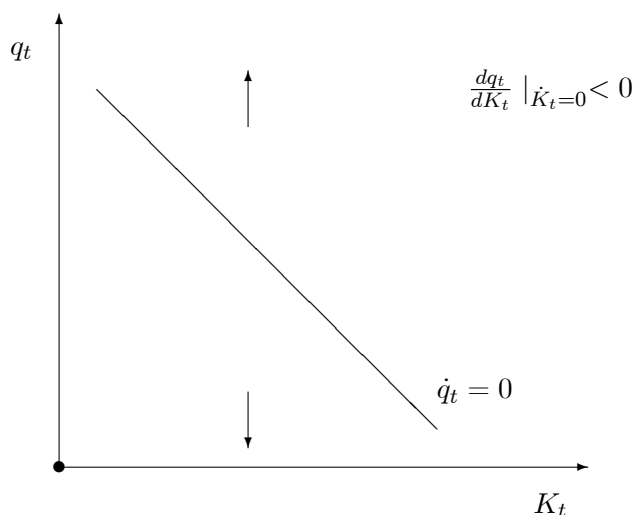


Figura 4.5. Ecuación dinámica de equilibrio parcial de la ratio q .

Por otra parte, la condición de equilibrio dinámica parcial para el ratio q viene dada por la expresión:

$$\dot{q}_t = q_t[(R_t + \delta) - \Psi_K(K_t, I_t)] - F_K(K_t, L_t) \quad (4.41)$$

Para calcular su pendiente tenemos que tener en cuenta que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala. Por tanto, la productividad marginal del capital es decreciente. Por otra parte, podemos observar que en la expresión anterior la productividad marginal del capital tiene signo negativo. Esto significa que cuanto mayor sea el stock de capital, más pequeño es el componente negativo y, por tanto, más pequeño tiene que ser la ratio q para que dicha ratio permanezca constante. Por otra parte, la ratio q va multiplicada por el término $(R_t + \delta) - \Psi_K(K_t, I_t)$, que vamos a suponer tiene signo negativo, es decir, que $\Psi_K(K_t, I_t)$ es próximo a cero. Esto significa que la pendiente de esta condición de equilibrio dinámica tiene que ser negativa.

$$\frac{\partial q_t}{\partial K_t} |_{\dot{q}_t=0} < 0 \quad (4.42)$$

La figura 4.6 muestra la dinámica de la economía representada por el modelo de la Q de Tobin, en la que podemos observar que la solución es del tipo punto de silla. Así, existen tanto

trayectorias estables como inestables, teniendo la senda estable pendiente negativa.

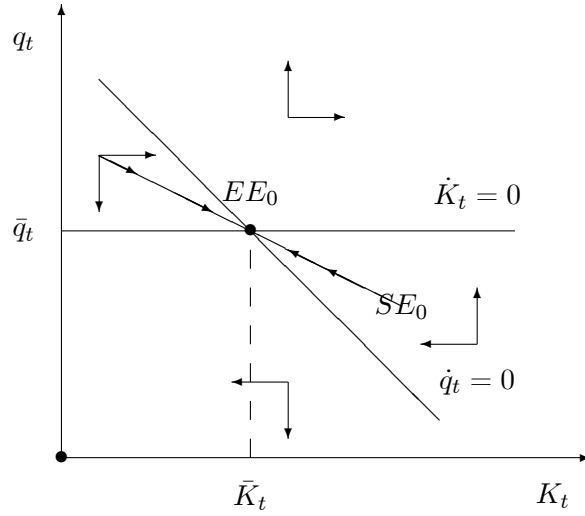


Figura 4.6. Diagrama de flujos del modelo de la Q de Tobin.

4.5.1 Ejemplo

Vamos a parametrizar el sistema dinámico anterior. Para ello necesitamos definir como es la función de producción y la función de costes de ajuste. En primer lugar, vamos a suponer que la función de producción es la siguiente:

$$Y_t = F(K_t) = K_t^\alpha$$

Por otra parte, vamos a suponer que la ecuación de costes de ajuste es cero:

$$C = C(I_t, K_t) = 0$$

por lo que:

$$\Psi(I_t, K_t) = I_t$$

Las condiciones de equilibrio dinámicas son en este caso:

$$\dot{K}_t = q_t - P_t^K = 0$$

$$\dot{q}_t = q_t(R_t + \delta) - \alpha K_t^{\alpha-1} = 0$$

Los valores de estado estacionario los obtenemos como sigue: De la ecuación dinámica para el stock de capital resulta que el valor de estado estacionario de la ratio q es igual al precio del capital:

$$\bar{q}_t = P_t^K$$

Sustituyendo el valor de estado estacionario de la ratio q en su ecuación dinámica y despejando resulta que:

$$\alpha \bar{K}_t^{\alpha-1} = P_t^K(R_t + \delta)$$

es decir, la productividad marginal en equilibrio es igual al coste de uso del capital y despejando el stock de capital obtenemos:

$$\bar{K}_t = \left(\frac{P_t^K(R_t + \delta)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

4.6 Análisis de perturbaciones

A continuación vamos a estudiar distintas perturbaciones y sus efectos sobre las decisiones de inversión. Este análisis va a ser relativamente simple ya que lo realizamos en términos del diagrama de flujos obtenido anteriormente. En primer lugar, vamos a suponer que se produce una disminución en el tipo de interés real.

El efecto a largo plazo de dicha perturbación viene dada en la figura 4.7. La disminución del tipo de interés provoca que la ecuación dinámica de la q de Tobin se vuelva negativa, ya que disminuye un término positivo. Para que esta ecuación vuelva a ser cero el otro término negativo tiene que disminuir también. Para que este término disminuya tiene que aumentar el stock de capital. Por tanto, esta condición de equilibrio dinámica se desplaza a la derecha. Esto significa que el nuevo estado estacionario va a implicar una ratio q igual a la inicial pero para un mayor stock de capital. En efecto, la disminución en el tipo de interés real supone una reducción del coste de uso del capital para la empresa, por lo que ésta va a aumentar la dotación de capital que va a utilizar en su proceso productivo.

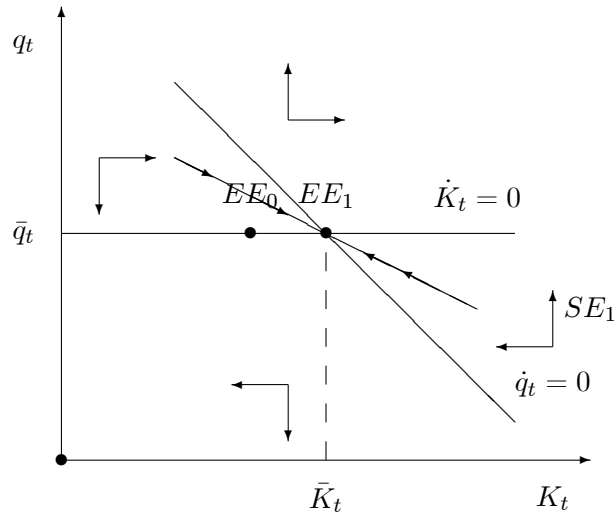


Figura 4.7. Efectos a largo plazo de una disminución en R .

A continuación vamos a describir los efectos de corto plazo. La disminución del tipo de interés real provoca un reajuste inmediato en la economía. El stock de capital es una variable rígida, mientras que la ratio q es una variable flexible, que viene determinada fundamentalmente en términos de expectativas. La disminución en el tipo de interés real provoca que disminuya el coste del capital, por lo que la inversión resulta rentable ya que partiendo de la situación de equilibrio inicial ahora invertir un euro adicional en capital aumenta el valor de mercado de la empresa en una cantidad superior al euro. Dado que el coste del capital aparece en el denominador de esta variable, la ratio q aumenta de forma instantánea hasta alcanzar la senda estable. A partir de este momento, el stock de capital comienza a aumentar gradualmente, al tiempo que comienza a disminuir la ratio q dado que a medida que aumenta el capital disminuye su productividad. Esto significa que nos vamos desplazando a lo largo de la senda estable hacia la derecha y hacia abajo, hasta que alcanzamos el nuevo estado estacionario en el momento en el que la ratio q vuelve a su nivel inicial.

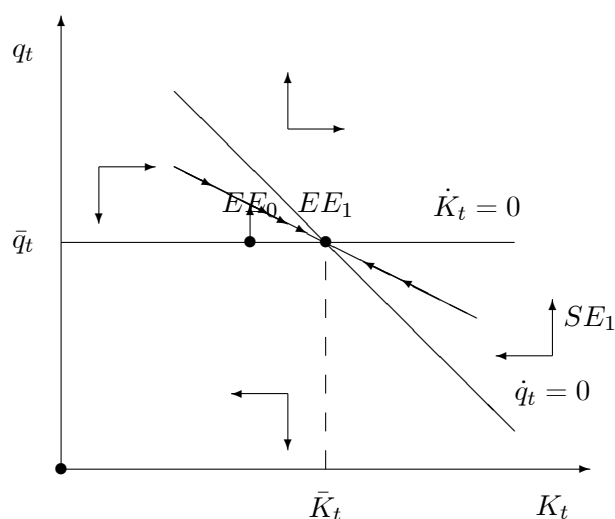


Figura 4.8. Efectos a corto, medio y largo plazo de una disminución en R .

En segundo lugar, vamos a suponer que se produce una disminución en el precio del capital, P^K . Partimos de nuevo de un estado estacionario inicial, que viene dado por la figura 4.9. En este caso vemos que esta variable únicamente aparece en la condición de equilibrio dinámica del stock del capital. Por tanto, únicamente esta ecuación dinámica sufre cambios en términos de su representación gráfica. El signo asociado al precio del capital es negativo, indicando que una disminución en el mismo hace que la ecuación tome un valor positivo. Para que vuelva a ser cero el componente positivo de la misma tiene que disminuir. Es decir, para cada nivel de stock de capital la ratio q tiene que ser inferior a la inicial. Esto significa que esta condición de equilibrio dinámica tiene que desplazarse hacia abajo.

La figura 4.10 muestra los efectos de esta perturbación en el largo plazo. Como consecuencia de la disminución en el precio del capital a largo plazo disminuye el valor del ratio q y aumenta el stock de capital de la empresa. Por tanto, en este caso va a cambiar la condición que determina la decisión de inversión de la empresa, dado que ahora el coste del capital es menor que el inicial y por tanto, resulta rentable invertir.

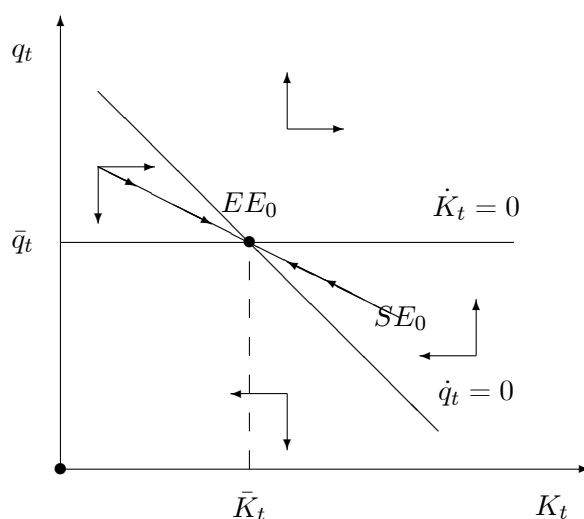


Figura 4.9. Estado estacionario inicial.

De nuevo, dado que la ratio q es flexible, se va a alterar en el corto plazo. En este caso no sabemos exactamente cómo es el corto plazo, ya que el reajuste que se produzca en dicha ratio depende del cambio cuantitativo del precio del capital y de la forma que tenga la senda estable. Así, puede producirse una disminución instantánea de la ratio q , un aumento o bien puede no verse alterada. En la figura 4.11, hemos representado un caso en la cual la senda estable está por debajo del estado estacionario inicial, por lo que el efecto a corto plazo consiste en una disminución de la ratio q hasta alcanzar la senda estable.

El medio plazo viene definido por los movimientos de ambas variables a lo largo de la senda estable. En efecto, el hecho de que el valor de la ratio q sea superior a su valor de largo plazo provoca un proceso inversor por parte de las empresas. Este proceso se va a traducir en un aumento progresivo del stock de capital, lo que a su vez va acompañado de una disminución de la ratio q , hasta que alcanzamos el nuevo estado estacionario.

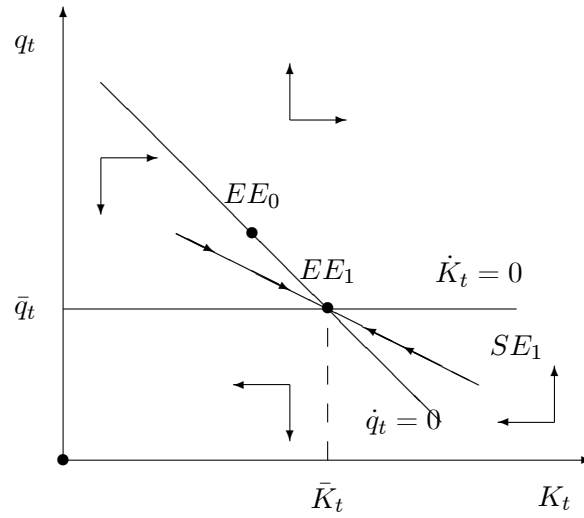


Figura 4.10. Efectos a largo plazo de una disminución en P^K .

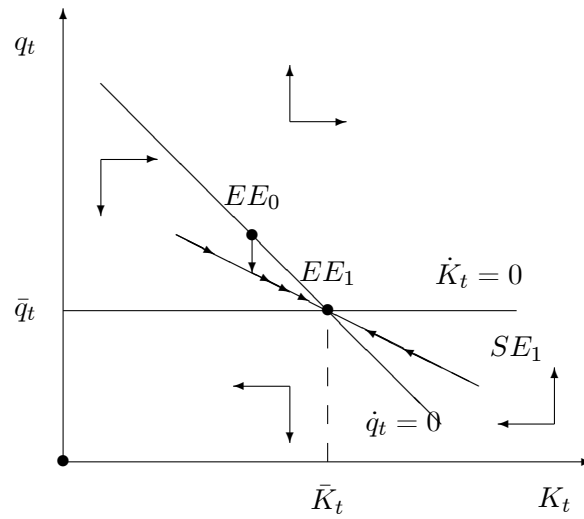


Figura 4.11. Efectos a corto, medio y largo plazo de una disminución en P^K .

5

El gobierno y la política fiscal

5.1. Introducción

5.2. Los impuestos

5.3. El gasto público

5.4. La equivalencia ricardiana

5.5. Los sistemas de seguridad social

5.1 Introducción

En este tema vamos a analizar el papel de un tercer agente: el gobierno o sector público. El gobierno es un agente que interviene en todas las esferas de la economía, a través de una gran variedad de instrumentos, que van a afectar al equilibrio resultante. En verdad, no podemos imaginarnos un sistema económico o un sistema social sin un gobierno. Al margen de las intervenciones estrictamente de carácter económico que realiza el sector público, este agente también tiene otras funciones que son de gran importancia para el desarrollo de la actividad económica, como la de dotar de un sistema legal y jurídico a todo el entorno en el que se sustenta el funcionamiento

de una economía, que va desde la definición de los derechos de propiedad a la de dotar de un sistema judicial operativo que permita el funcionamiento eficiente del mercado.

Desde el punto estrictamente económico el papel del gobierno viene justificado por una gran variedad de factores: la provisión de bienes públicos, la redistribución de la renta para mitigar las desigualdades creadas por el mercado, la aplicación de políticas de corto plazo para reducir las fluctuaciones económicas, actuaciones para la promoción de la eficiencia económica y para el fomento del crecimiento económico, etc. Sin embargo, siempre ha existido un intenso debate sobre las esferas y actuaciones que debe llevar a cabo el sector público en la economía. Mientras la escuela keynesiana justifica que el sector público juegue un papel destacado en el comportamiento de una economía, la escuela clásica aboga por limitar la intervención del sector público a aquellas áreas en las que ésta sea estrictamente necesaria. Detrás de este intenso debate aparece el hecho que, por una parte la intervención del sector público es algo necesario debido a una gran cantidad de factores que van desde la existencia de bienes públicos hasta la corrección de asignaciones ineficientes por parte del mercado. Por otro lado, las intervenciones del sector público pueden generar importantes distorsiones en el equilibrio resultante del mercado que den lugar a situaciones ineficientes. Esta cara y cruz del sector público es lo que mantiene vivo el debate en torno el papel que debe jugar este tercer agente en la economía.

El debate fundamental en la actualidad sobre el papel del sector público gira principalmente en torno a los efectos de la política fiscal. El mercado por si sólo no funciona, dado que presenta una gran cantidad de ineficiencias, que denominamos externalidades o fallos de mercado. La existencia de estos fallos de mercado justifica la intervención del estado en la economía, con el objetivo de resolver o mitigar estos fallos y de eliminar ineficiencias. En términos exclusivamente económicos esto significa que el gobierno debe obtener unos ingresos, a través de la recaudación impositiva, para realizar determinados gastos, a través del consumo y la inversión pública. El problema surge cuando el gobierno interviene en esferas del mercado que no presentan externalidades o fallos de mercado. En este caso el estado introduce distorsiones que lejos de aumentar la eficiencia de la economía, la disminuye. Por tanto, el debate

actual no es estado si, estado no, sino que tipo de intervenciones debe realizar el sector público en una economía para minimizar las distorsiones que genera su propia intervención y minimizar los fallos del mercado.

Con anterioridad a la década de los 70 la política fiscal ha resultado ser efectiva como política de demanda (política de estabilización) a corto plazo. Sin embargo, a partir de mediados de los 70, y coincidiendo con las perturbaciones del petróleo, las políticas fiscales comenzaron a mostrarse inefectivas. Esto llevó a un replanteamiento de la política fiscal, al igual que ocurrió en el resto de áreas de la macroeconomía. A partir de este momento se instauró el denominado pesimismo neoricardiano en relación a la política fiscal, que hace referencia a que la política fiscal de demanda tiene unos efectos muy limitados sobre la economía y provoca desplazamientos de la actividad privada por parte del sector público.

Un aspecto relevante de la visión actual en relación a la política fiscal es la limitación de los déficit públicos que han adoptado diferentes economías. Por ejemplo, en Europa se ha adoptado un límite de déficit público del 3% del PIB. Estas limitaciones sobre el déficit público surgen del análisis que vamos a realizar a continuación, en el cual se obtiene que un déficit público actual debe ser compensado por un superávit público posterior. Así, por ejemplo, una disminución en los impuestos ahora genera un aumento en el ingreso actual pero que se verá compensado por un menor ingreso futuro resultante de mayores impuestos futuros para amortizar la deuda pública emitida ahora. Este hecho va a suponer una importante limitación a la hora de evaluar los efectos de la política fiscal como política de estabilización en el corto plazo. No obstante, la política fiscal, a través de la inversión pública, también puede ser útil como política de fomento del crecimiento económico en el largo plazo.

En este tema vamos a analizar diferentes aspectos relacionados con el gobierno como agente económico. El tratamiento que le vamos a dar al gobierno es diferente al dado anteriormente a los consumidores y a las empresas. Estos agentes toman decisiones en términos de la maximización de una determinada función objetivo. Sin embargo, el comportamiento y las decisiones del gobierno lo podemos considerar como algo dado, es decir, tratar como exógenas a la economía las variables de política económica que son decisión del gobierno. La otra

opción consiste en definir una serie de funciones objetivo en términos de las cuales el gobierno decide las variables de política económica, teniendo en este caso la consideración de variables endógenas. En nuestro caso vamos a tomar la primera opción, por lo que no nos centramos en analizar cuáles son los objetivos del gobierno, sino que tomamos como dadas las decisiones del mismo. Esto supone que todas las variables de política económica, fundamentalmente las referentes a la política fiscal, son exógenas y les vienen dadas a los agentes privados (consumidores y empresas). Al margen del gobierno también podríamos analizar el papel del Banco Central suponiendo que sigue una regla de Taylor, ya que es este agente el que va a determinar las variables de política monetaria. No obstante, el papel del Banco Central sólo resultaría de interés si introducimos algún tipo de rigideces en salarios y precios. En este tema nuestro interés se va a centrar en analizar diferentes aspectos de la política fiscal.

En primer lugar, vamos a estudiar el papel de la política fiscal por el lado de los ingresos públicos, es decir, los impuestos. Para ello vamos a modificar los problemas resueltos en los temas anteriores en términos de las decisiones de los consumidores y las empresas. De este modo, vamos a considerar los diferentes impuestos existentes y vamos a estudiar cuáles son sus efectos sobre las decisiones de los individuos. A continuación vamos a introducir el concepto de equivalencia ricardiana, que es un elemento a tener en cuenta siempre que hablemos de política fiscal. Al introducir este concepto vamos a estudiar un nuevo tipo de modelo, denominado modelo de generaciones solapadas, a través del cual podemos analizar elementos que van a tener una gran influencia sobre la política fiscal, como son las transferencias de renta intergeneracionales y las herencias. Por último, vamos a estudiar las implicaciones de los sistemas de seguridad social.

5.2 Los impuestos

En esta sección vamos a introducir en nuestro análisis la existencia de diferentes impuestos que fija el gobierno en la economía para obtener unos determinados ingresos públicos. Estos ingresos impositivos son los que va a utilizar posteriormente el gobierno para realizar sus actuaciones de política y que van a tener dos componentes: el consumo público y la inversión pública. El consumo público hace

referencia al gasto corriente del gobierno, mientras que la inversión pública hace referencia a al gasto en capital físico público. Para financiar todas estas actuaciones el gobierno necesita disponer de unos ingresos, ingresos que los obtiene de los agentes privados de la economía: consumidores y empresas. Hacienda somos todos, aunque unos más que otros.

La figura 5.1 muestra la evolución del total de ingresos fiscales en España como porcentaje del PIB para el periodo muestral 1995-2006. Los datos proceden de la base de datos "*Taxation trends*", elaborada por la Comisión Europea. Como podemos observar, la carga fiscal ha ido aumentando paulatinamente con el tiempo, indicando un aumento de la presión fiscal. Así en 2006 los ingresos fiscales suponían un 36,5% del PIB de la economía española, frente al 32,7% que representaban en 1995. Particularmente importante ha sido el aumento ocurrido en los últimos tres años, que muestra un aumento de la presión fiscal.

Este aumento de la presión fiscal puede deberse a multitud de causas. En primer lugar, puede deberse a un aumento en los tipos impositivos de los diferentes impuestos, elemento que analizaremos a continuación. En segundo lugar, hemos de tener en cuenta que algunos impuestos, como el IRPF, que representan una importante proporción de los ingresos fiscales tiene una estructura progresiva. Así, cuanto mayor sea la renta de la economía, más que proporcionalmente aumentan los ingresos fiscales, lo que equivale a una mayor presión fiscal. Este fenómeno ocurriría en las etapas expansivas del ciclo económico. Por último, el ciclo económico también tiene efectos sobre el fraude fiscal, disminuyendo en etapas de expansión, mientras que aumentaría en etapas de recesión.

Por otra parte, el gobierno puede emitir activos financieros, es decir, pueden endeudarse si necesita un nivel de gasto superior a los ingresos impositivos. Estos activos financieros son la denominada deuda pública, por la cual hay que pagar una determinada rentabilidad. En cualquier caso, la restricción presupuestaria del gobierno también tiene que cumplirse en el largo plazo, en la cual los gastos públicos tienen que ser igual que los ingresos impositivos. De este modo podemos definir la restricción presupuestaria del gobierno en el momento t como:

$$G_t + (1 + R_t)D_{t-1} = T_t + D_t \quad (5.1)$$

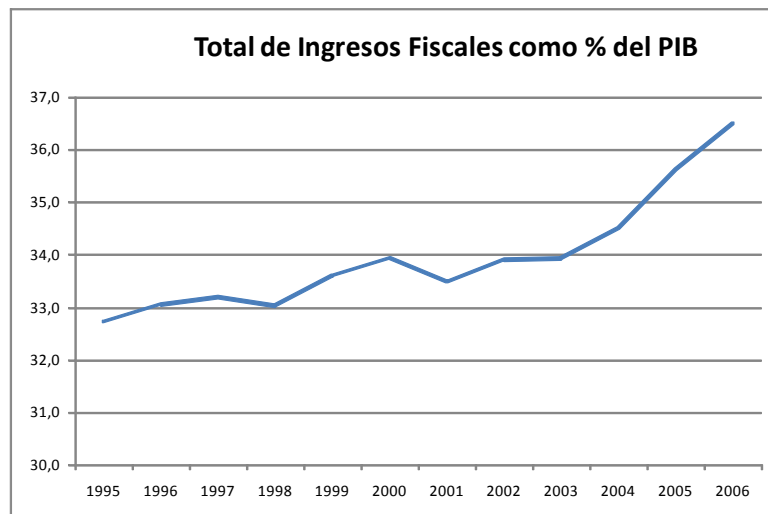


Figura 5.1. Ingresos impositivos en España

donde G_t es el gasto público, D_t es la deuda pública y T_t son los ingresos públicos. Así, la deuda pública es dinero adicional a la recaudación impositiva que ingresa el gobierno para gastar, mientras que los gastos públicos totales vienen dados por el propio gasto público y por el pago de los intereses más el montante de la deuda pública. La restricción presupuestaria intertemporal sería por tanto:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+R_i)^i} + (1+R_0)D_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+R_i)^i}$$

En primer lugar, vamos a resolver de nuevo el problema del consumidor pero considerando la existencia de impuestos, con el objetivo de estudiar cuáles son los efectos de la política fiscal sobre las decisiones de los consumidores. El principal resultado que vamos a obtener es que la renta permanente no se ve afectada por los impuestos, por lo que la política fiscal va a ser ineficaz. Así, el aumento o la disminución en los impuestos no va a tener consecuencias sobre las decisiones de los individuos en términos de su senda óptima de consumo, dependiendo del enfoque temporal que utilicemos para definir el ciclo vital de estos individuos. No obstante, la política fiscal tiene importantes consecuencias sobre las

decisiones de consumo, introduciendo efectos distorsionadores sobre la economía al alternar las decisiones de los individuos respecto a las que tomarían si no existiesen los impuestos. En segundo lugar, realizaremos un análisis similar pero en el caso de las empresas.

Vamos a ver cuáles son las implicaciones de introducir impuestos en un esquema sencillo de dos periodos. El resultado que vamos a obtener es que los impuestos y su alteración, no van a tener consecuencias sobre la economía, siempre y cuando la restricción presupuestaria del gobierno se cumpla durante el periodo considerado. En este caso vamos a comprobar que alteraciones en el nivel de impuestos no tiene ninguna implicación sobre la economía al no afectar a la renta permanente de los individuos. La clave que explica este resultado está en que, aunque la deuda pública es un activo financiero, no forma parte de la riqueza de los individuos.

Vamos a suponer un individuo que vive dos periodos, durante los cuales obtiene una determinada renta salarial. Suponemos que existe un gobierno y que tiene unos gastos iguales a G durante el primer periodo. Para financiar estos gastos el gobierno tiene dos posibilidades: Poner un impuesto en el primer periodo igual a G , o endeudarse en el primer periodo pagando una rentabilidad dada por R y poner un impuesto en el segundo periodo igual a $G(1+R)$. Vamos a ver que consecuencias tiene cada una de estas posibilidades sobre la renta permanente del individuo y, por tanto, sobre sus decisiones de consumo.

Para ello tenemos que estudiar cómo cambia la restricción presupuestaria de los consumidores en cada caso. Si el gobierno pone el impuesto en el primer periodo las restricciones presupuestarias de los individuos en cada periodo de su ciclo vital son las siguientes:

$$C_1 + B_1 = W_1 - T$$

$$C_2 = W_2 + (1 + R)B_1$$

siendo $T = G$. Por tanto, la restricción presupuestaria de este individuo, calculada en el periodo 2 viene dada por:

$$C_2 + (1 + R)C_1 = W_2 + (1 + R)(W_1 - T)$$

o equivalentemente, si la calculamos en el periodo 1 sería:

$$C_1 + \frac{C_2}{(1+R)} = W_1 - T - \frac{W_2}{(1+R)}$$

Esta restricción presupuestaria intertemporal la tenemos representada gráficamente en la figura 5.2, donde también hemos representado la elección del individuo en términos de su nivel de consumo óptimo en cada periodo. En este caso concreto hemos representado un individuo que quiere consumir poco en el primer periodo y mucho en el segundo. Vemos que sólo un cambio en la restricción presupuestaria intertemporal va a alterar la decisión del individuo, por lo que vamos a calcular cómo eliminando los impuestos del primer periodo y pasándolos al segundo periodo afecta a dicha restricción presupuestaria intertemporal.

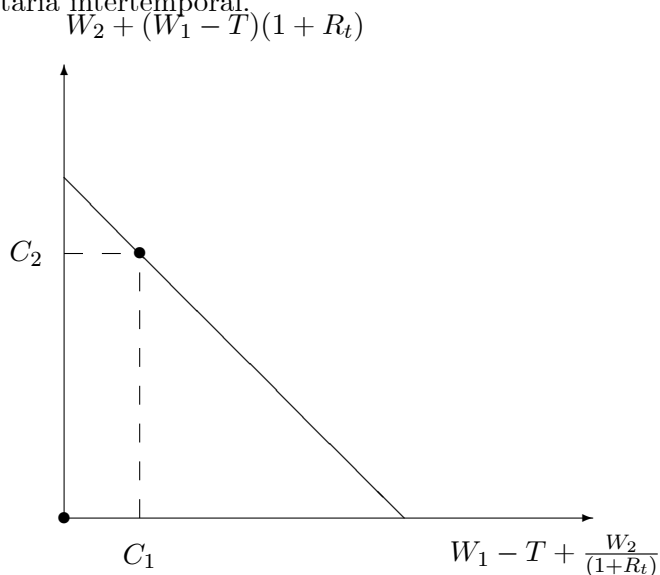


Figura 5.2. Restricción presupuestaria intertemporal con impuestos en el primer periodo

Repetimos el mismo ejercicio pero ahora suponiendo que el gobierno pone los impuestos en el segundo periodo, es decir, se endeuda a través de la emisión de deuda pública. En este caso las restricciones presupuestarias de los individuos en cada periodo de su ciclo vital son las siguientes:

$$C_1 + B_1 = W_1$$

$$C_2 = W_2 - (1 + R)T + (1 + R)B_1$$

siendo $T = G$. Por tanto, la restricción presupuestaria de este individuo, calculada en el periodo 2 viene dada por:

$$C_2 + (1 + R)C_1 = W_2 - (1 + R)T + (1 + R)W_1$$

o equivalentemente, si la calculamos en el periodo 1 sería:

$$C_1 + \frac{C_2}{(1 + R)} = W_1 - \frac{W_2}{(1 + R)} - T$$

Si comparamos esta restricción presupuestaria intertemporal con la obtenida anteriormente podemos comprobar que son idénticas. Es decir, la decisión del gobierno en relación a los impuestos no tiene consecuencias sobre la decisión de los individuos en términos de su nivel de consumo, ya que no suponen una alteración de la renta permanente.

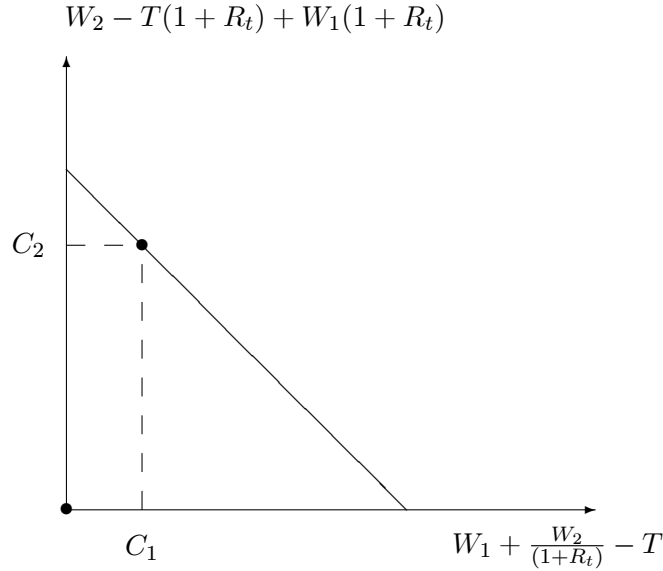


Figura 5.3. Restricción presupuestaria intertemporal con impuestos en el segundo periodo

En efecto, tal y como podemos observar en la figura 5.3, la renta permanente permanece constante a lo largo del ciclo vital del individuo, por lo que su elección en términos de los niveles de

consumo óptimos en cada periodo es totalmente independiente de las decisiones de política fiscal del gobierno.

El resultado obtenido anteriormente nos indica que la política fiscal, a través de variaciones en los impuestos, es inefectiva, ya que no afecta a las decisiones de los individuos en términos de consumo y ahorro. Esto es así, porque hemos supuesto que durante el ciclo vital del individuo se cumple también la restricción presupuestaria del gobierno. Si durante el ciclo vital del individuo no se cumpliera la restricción presupuestaria del gobierno, entonces las decisiones de política fiscal afectarían a la decisión de los individuos. Por tanto, la efectividad de la política fiscal depende de si consideramos que durante el ciclo vital del individuo se cumple o no la restricción presupuestaria del gobierno. El gobierno tiene vida infinita. Si suponemos que el consumidor también tiene vida infinita ya nos estamos garantizando que la restricción presupuestaria del gobierno se cumple durante el ciclo vital del individuo, por lo que la política fiscal no tendría efectos. La política fiscal sólo podría ser efectiva si la vida del individuo es finita y durante dicha vida no se cumple la restricción presupuestaria del gobierno. Dada la importancia de este punto a la hora de hablar de la política fiscal, volveremos a él más adelante.

El hecho de que la política fiscal no tenga efectos sobre las decisiones de los individuos no quiere decir que no tiene ningún efecto sobre la economía. En realidad la política fiscal que estamos evaluando introduce distorsiones sobre las variables macroeconómicas. En el caso anterior, el impuesto reduce los niveles de consumo del individuo a lo largo de toda su vida, y supone que parte de sus ingresos salariales pasan a ser propiedad del gobierno. Por tanto, la presencia del gobierno está afectando a la decisión de los individuos en términos de su consumo privado.

La clave del anterior resultado está en que la deuda pública no forma parte de la riqueza de los individuos. En principio, podemos pensar que todos los activos financieros que posee un individuo es riqueza del individuo, ya que obtiene una rentabilidad por ellos y cuando finalice la vida del activo obtendrá el capital correspondiente al mismo. Sin embargo, esto es cierto para los activos financieros provenientes de otros agentes del sector privado de la economía, pero no es cierto para los activos financieros que provienen del gobierno, es decir, para la deuda pública. Para ello vamos a mostrar un

argumento muy sencillo. El saldo vivo de la deuda puede definirse como:

$$D_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+R_i)^i} - E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+R_i)^i}$$

Por otra parte, la riqueza del individuo la podemos definir como los ingresos del individuo más el saldo inicial de deuda menos el valor actual descontado de los impuestos futuros a pagar más las transferencias realizadas por el gobierno a través del gasto público:

$$Z_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{W_{t+i}}{(1+R_i)^i} + D_t - E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{T_{t+i}}{(1+R_i)^i} + E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_{t+i}}{(1+R_i)^i}$$

Operando obtenemos que la riqueza del individuo viene dada por:

$$Z_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{W_{t+i}}{(1+R_i)^i}$$

es decir, exactamente la misma expresión que obtendríamos si no consideramos la presencia del gobierno. Esto significa que los activos financieros propiedad del individuo y que suponen deuda pública del gobierno, no forman parte de su riqueza, dado que esa deuda pública tiene que ser pagada por el propio individuo en el futuro.

5.2.1 La curva de Laffer

La curva de Laffer constituye una herramienta fundamental para estudiar la relación entre los tipos impositivos y la recaudación fiscal.¹ En términos generales, la curva de Laffer es la relación entre el nivel de impuestos y el nivel de recaudación impositiva (ingresos fiscales) para una economía. Si los impuestos son nulos, está claro que el nivel de ingresos públicos es también cero. Lo mismo ocurriría

¹Aunque fue Laffer quien lo popularizó, lo cierto es que dicho análisis se debe originalmente a Ibn Khaldun, Ministro de Economía y Hacienda de Túnez, que vivió entre los años 1332 y 1406, al que también se le considera como precursor del marxismo. Entre sus planteamientos está el que un aumento de los impuestos por parte del gobierno no provocaría un mayor nivel de ingresos, ya que afectaría negativamente a la producción, mientras que una disminución de los impuestos aumentaría el nivel de producción y los ingresos fiscales, lo que equivendría a una situación reflejada por la parte decreciente de la curva de Laffer.

en el caso extremo en el que el tipo impositivo fuese del 100%, ya que en este caso el nivel de actividad sería cero. Por tanto, la curva de Laffer tiene un tramo creciente y un tramo decreciente.

La importancia de la curva de Laffer radica en el hecho de que constituye un instrumento fundamental a la hora de analizar cambios en la política fiscal. Así, en primer lugar, supone un aspecto de vital importancia conocer en qué parte de la curva de Laffer se encuentra una economía, con el objeto de diseñar la política impositiva óptima. Si una economía se encuentra en la parte decreciente de la curva de Laffer, entonces debe bajar los tipos impositivos, ya que con ellos aumentaría la recaudación fiscal y la actividad económica. Sin embargo, si una economía se encuentra en la parte creciente de la curva de Laffer, entonces una disminución de los tipos impositivos provocaría un aumento de la actividad económica, pero a costa de una disminución en los ingresos fiscales. Por otra parte, el conocimiento de la curva de Laffer permitiría conocer que recorrido queda en una economía para aumentar los impuestos con objeto de obtener mayores ingresos fiscales y qué tipos impositivos deberían de aumentar con objeto de provocar las menores distorsiones negativas posibles en la economía.

En realidad, lo que está representando la curva de Laffer es la elasticidad de los ingresos públicos ante variaciones en los tipos impositivos y que existe un tipo impositivo óptimo en términos de ingresos públicos. En efecto, si el nivel de impuestos fuese del 0% o del 100%, entonces el nivel de ingresos públicos sería cero. En el primer caso, al ser el tipo impositivo nulo, la recaudación también sería nula. En el segundo caso, al ser el tipo impositivo la totalidad de las rentas generadas, no existiría actividad económica y de nuevo los ingresos públicos serían cero. Por tanto, debe existir un punto intermedio tal que los ingresos públicos sean máximos.

Implícito a este razonamiento está el hecho de que los tipos impositivos afectan negativamente a la actividad económica. Así, partiendo de un nivel impositivo muy bajo, aumentar los impuestos provoca un aumento en los ingresos fiscales, debido a que el impacto negativo sobre la actividad económica es menor que el impacto positivo que genera sobre la recaudación. Sin embargo, a medida que aumentamos los tipos impositivos el efecto distorsionador de los mismos se hace más grande, donde los efectos negativos sobre la actividad económica van en aumento, por lo que los ingresos fiscales

aumentan en menor proporción. Este efecto ocurre hasta que los impuestos alcanzan un nivel en el que la actividad económica se ve seriamente afectada, provocando pérdidas en el nivel de ingresos fiscales.

La figura 5.4 muestra en términos teóricos la curva de Laffer. La hemos dibujado asimétrica para indicar que el máximo no tiene porqué estar situado en un tipo impositivo en torno al 50% ni que la pendiente de ambos tramos ser iguales. La elasticidad es positiva en el tramo creciente de la curva. Sin embargo, a medida que aumentamos el tipo impositivo dicha elasticidad va disminuyendo hasta alcanzar el máximo en el cual la elasticidad es cero. A partir de este punto, la elasticidad entre el tipo impositivo y la recaudación fiscal se hace negativa. Esta curva en forma de U invertida no aparecería para todos los tipos de impuestos. Así, esta forma sería correcta en el caso de impuestos sobre las rentas del trabajo o las rentas del capital. Sin embargo, en el caso del impuesto sobre el consumo, la pendiente siempre sería positiva.

5.2.2 *El problema del consumidor con impuestos*

A continuación vamos a resolver de nuevo el problema del consumidor pero introduciendo los impuestos que le afectan. Son tres tipos de impuestos: impuestos sobre el consumo, impuestos sobre las rentas del trabajo e impuestos sobre las rentas del capital. Los impuestos sobre el consumo son impuestos indirectos, y provocan que el precio de los bienes sea superior al que existiría sin este impuesto. Esto significa que cuanto mayor sea el impuesto, menor será el nivel de consumo dados unos determinados recursos. El principal componente del impuesto sobre el consumo es el IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido), si bien también existen otros impuestos indirectos así como impuestos especiales sobre determinados productos como los carburantes, el alcohol o el tabaco. Los impuestos sobre la renta generada por el factor trabajo y la renta generada por el capital son impuestos directos, y aparecen contenidos en el IRPF (Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas). En el análisis del consumidor realizado en el tema 3 obteníamos que la renta de los individuos procedía de la utilización de sus dotaciones de factores productivos: trabajo y capital. Los ingresos del factor trabajo van a provenir del

salario obtenido mientras que los ingresos del capital provienen de su rentabilidad.

En realidad, el impuesto sobre la rentabilidad del capital es un impuesto sobre el ahorro. También podemos interpretar el impuesto sobre el capital como un impuesto indirecto sobre el consumo, ya que el ahorro actual es consumo futuro. Es decir, si gravamos impositivamente el capital, estamos gravando el ahorro, lo que equivale a un impuesto sobre el consumo futuro.

Por otra parte, vemos que siempre existe imposición doble en el sentido de que se grava los ingresos del individuo y posteriormente se vuelven a gravar cuando se transforman en consumo.

El cuadro 5.1 muestra la estructura impositiva de la economía española para el año 2006. Escluyendo las cotizaciones a la Seguridad Social, observamos que el volumen de ingresos provenientes de los impuestos indirectos es muy similar al derivado de los impuestos directos, llegando en ambos casos a representar en torno al 50% del total de ingresos impositivos. El IVA supone la mitad de los ingresos por impuestos indirectos, por lo que supone en torno al 25% del total de ingresos impositivos.

Tabla 5.1: Estructura impositiva de la economía española, 2006

	2006	% Impuestos	% Ingresos
Impuestos Indirectos	124.528	51,11	34,32
IVA	62.677	25,73	17,28
Impuestos Especiales	22.131	9,08	6,10
Impuestos otros productos	28.465	11,68	7,85
Otros impuestos indirectos	11.255	4,62	3,10
Impuestos Directos	119.109	48,89	32,83
IRPF	69.412	28,49	19,13
Sociedades	41.483	17,03	11,43
Otros impuestos directos	8.214	3,37	2,26
Total Impuestos	243.637	100,00	67,15
Cotizaciones a la S. Social	119.178	100,00	32,85
Cotizaciones Empleadores	86.768	72,81	23,92
Cotizaciones Empleados	18.991	15,93	5,23
Cotizaciones Autónomos	13.419	11,26	3,70
Total Ingresos del Estado	362.815		100,00

La figura 5.5 muestra la evolución de los tipos efectivos medios de los tres principales impuestos que afectan a los individuos para España durante el periodo 1965-2005. Como se puede observar la tendencia de estos tipos impositivos ha sido la de aumentar a lo largo del tiempo. El tipo sobre el consumo se mantuvo estable e incluso disminuyó durante la década de los 70, para posteriormente aumentar a partir de mediados de los 80. Esto coincide con la entrada de España en la Unión Europea y la introducción del IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido) que es el principal impuesto sobre el consumo. Los otros tipos impositivos han experimentado una senda creciente durante todo el periodo, principalmente el correspondiente a las rentas del trabajo, si bien en los últimos años este impuesto se ha mantenido relativamente estable mientras que los mayores incrementos los ha experimentado el impuesto sobre las rentas del capital.

Comparando los tres tipos impositivos observamos que el menor corresponde al impuesto sobre el consumo, mientras que el más elevado es el impuesto sobre las rentas del trabajo. Así, en una economía como la española son las rentas del trabajo las que soportan la mayor parte de la carga fiscal, al igual que ocurre en la mayoría de países europeos.

Tabla 5.2: Tipos medios efectivos (2005)

	τ_c	τ_l	τ_k
Australia	0.095	0.218	0.450
Austria	0.147	0.482	0.176
Canada	0.098	0.299	0.334
Denmark	0.199	0.397	0.448
Finland	0.176	0.451	0.256
France	0.129	0.430	0.298
Germany	0.120	0.374	0.177
Italy	0.107	0.431	0.283
Japan	0.062	0.257	0.356
Netherlands	0.146	0.359	0.192
Spain	0.116	0.348	0.272
Sweden	0.166	0.523	0.301
UK	0.124	0.255	0.325
USA	0.039	0.221	0.299

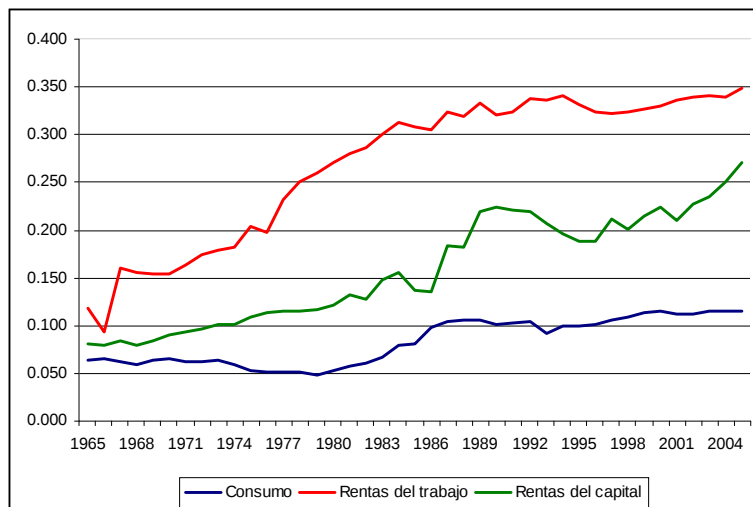


Figura 5.2. Tipos impositivos de España

La tabla 5.2 muestra los tipos efectivos medios correspondientes a un grupo de países. Lo importante de esta comparación es que el menú de impuestos es muy diferentes entre países. Podemos distinguir dos grupos diferenciados. En primer lugar, hay un grupo de países donde el impuesto sobre el trabajo es muy superior al impuesto sobre el capital. Estos países son Austria, Finlandia, Francia, Alemania, Italia, Holanda, España y Suecia, es decir, países europeos. Por el contrario, hay otro grupo de países donde los impuestos sobre las rentas del trabajo son mucho más bajos e inferiores al tipo impositivo sobre las rentas del capital. Estos países son Australia, Canadá, Japón, Reino Unido y Estados Unidos.

En este caso, la restricción presupuestaria del individuo la podemos escribir como:

$$(1 + \tau_t^c)C_t + I_t = (1 - \tau_t^l)W_tL_t + (1 - \tau_t^k)R_tK_t + G_t \quad (5.2)$$

donde I_t es la inversión, τ_t^c es el tipo impositivo sobre el consumo, τ_t^l es el tipo impositivo sobre las rentas del trabajo y τ_t^k es el tipo impositivo sobre las rentas del capital. La restricción presupuestaria nos indica que el consumo más la inversión neta no pueden exceder

la suma de las rentas provenientes del trabajo y de las rentas netas de depreciación del capital. Por tanto, vemos que la introducción del gobierno cambia la restricción presupuestaria del individuo. G_t son las transferencias que recibe el individuo del gobierno. Nótese que las transferencias entran como una constante (una determinada cantidad de dinero) en la restricción presupuestaria del gobierno, por lo que no va a tener ninguna influencia sobre las decisiones del mismo. Esto no ocurre con los tipos impositivos, que si que van a alterar las decisiones de los consumidores en términos de consumo-ahorro y en términos de su oferta de trabajo.

Suponemos que periodo a periodo se cumple la restricción presupuestaria del gobierno. Por tanto, las transferencias que reciben los consumidores son:

$$G_t = \tau_t^c C_t + \tau_t^l W_t L_t + \tau_t^k (R_t - \delta) K_t \quad (5.3)$$

Vamos a suponer que la función de utilidad instantánea es igual a la utilizada anteriormente:

$$U(C_t, N_t \bar{H} - L_t) = \gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t) \quad (5.4)$$

donde C_t representa al consumo privado en bienes y servicios en el momento t . El ocio se define como $N_t \bar{H} - L_t$, es decir, la población en edad de tomar decisiones de ocio y trabajo, N_t , por el número de horas efectivas al año, $\bar{H}$, menos las horas dedicadas a trabajar, L_t . El parámetro γ ($0 < \gamma < 1$) nos indica la proporción del consumo sobre el ingreso total.

El stock de capital se mueve de acuerdo con:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \quad (5.5)$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital y donde I_t es la inversión bruta.

El problema al que se enfrentan las familias consiste en maximizar el valor de su utilidad:

$$\text{Max}_{\{C_t, L_t\}_t^\infty} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t)] \quad (5.6)$$

sujeto a la restricción presupuestaria del consumidor representativo, que teniendo en cuenta los impuestos y sustituyendo la ecuación de acumulación del capital, resulta:

$$(1 + \tau_t^c)C_t + K_{t+1} - K_t = (1 - \tau_t^l)W_t L_t + (1 - \tau_t^k)(R_t - \delta)K_t + G_t \quad (5.7)$$

dato K_0 , el stock de capital privado inicial y donde $\beta \in (0, 1)$, es el factor de descuento de los consumidores, K_t es el stock de capital, W_t es el precio relativo del factor trabajo (el salario real) y R_t es el precio relativo del factor capital (el tipo de interés real). Nótese que el tipo impositivo sobre las rentas del capital no aplica directamente a la rentabilidad bruta del capital sino a la rentabilidad del capital neta de la depreciación del mismo.

Las condiciones de primer orden del problema de las familias vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} : \beta^t \left[\frac{\gamma}{(1 + \tau_t^c)C_t} - \lambda_t \right] = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} : -\beta^t \left[(1 - \gamma) \frac{1}{N_t \bar{H} - L_t} + \lambda_t (1 - \tau_t^l) W_t \right] = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} : E_t \beta^t \lambda_t \left[(1 - \tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] - \lambda_{t-1} \beta^{t-1} = 0 \quad (5.10)$$

donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asignado a la restricción presupuestaria en el momento t . Despejando el parámetro de Lagrange, obtenemos:

$$\lambda_t = \frac{\gamma}{(1 + \tau_t^c)C_t} \quad (5.11)$$

Combinando las ecuaciones (5.8) y (5.9) obtenemos la condición que iguala la desutilidad marginal de una hora adicional de trabajo con la utilidad marginal de los ingresos derivados de dicha hora trabajada:

$$\frac{(1 - \gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{N_t \bar{H} - L_t} = \frac{(1 - \tau_t^l)}{(1 + \tau_t^c)} W_t \quad (5.12)$$

Combinando la ecuación (5.8) con la ecuación (5.10) obtenemos la condición de primer orden intertemporal,

$$\frac{(1 + \tau_t^c)C_t}{(1 + \tau_{t-1}^c)C_{t-1}} = \beta \left[(1 - \tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] \quad (5.13)$$

que nos indica cual es la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo. Por tanto, la solución del problema de elección del consumidor se resuelve en términos de una ecuación estática que determina el número de horas trabajadas por el individuo (la oferta de trabajo) y una ecuación dinámica que nos dice como es la senda de consumo o, equivalentemente, como son las decisiones de ahorro/inversión del individuo.

Como podemos observar la oferta de trabajo se ve afectada netativamente tanto por el impuesto sobre el consumo como por el tipo impositivo sobre las rentas que genera este factor. Así, cuanto mayor sea el tipo impositivo sobre la renta del trabajo, menor es el ingreso salarial que recibe el individuo y, por tanto, menor será su oferta de trabajo.

Por su parte la ecuación que determina la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo depende de los impuestos sobre el capital y de las variaciones del impuesto sobre el consumo. Este resultado se debe a que esta ecuación lo que está determinando es el volumen de ahorro del individuo, que es gravado por el impuesto sobre las rentas del capital. Suponiendo que el impuesto sobre el consumo se mantiene constante en el tiempo, la ecuación resultante sería:

$$C_t = \beta \left[(1 - \tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] C_{t-1} \quad (5.14)$$

5.2.3 El problema de las empresas con impuestos

El sector productivo de la economía tal y como lo hemos definido también está sujeto a determinados impuestos. Así, si analizamos la empresa podemos definir dos tipos impositivos que aplican sobre la misma: el impuesto sobre los beneficios y las cotizaciones a la seguridad social. Si tenemos en cuenta estos dos tipos impositivos el problema de maximización de beneficios de las empresas vendría dado por:

$$\max \Pi_t = (1 - \tau_t^b)[Y_t - (1 + \tau_t^{ss})W_t L_t - R_t K_t] \quad (5.15)$$

sujeto a la restricción tecnológica:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (5.16)$$

donde τ_t^b es el tipo impositivo sobre los beneficios, es decir, sobre los ingresos totales menos los costes totales, mientras que τ_t^{ss} son las cotizaciones a la seguridad social de los trabajadores, que suponen un coste añadido sobre el salario que se paga a los trabajadores.

Si calculamos las condiciones de primer orden del problema anterior obtenemos:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = F_K(K_t, L_t) - R_t = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = F_L(K_t, L_t) - (1 + \tau_t^{ss})W_t = 0 \quad (5.18)$$

Resolviendo obtenemos que:

$$\begin{aligned} F_K(K_t, L_t) &= R_t \\ F_L(K_t, L_t) &= (1 + \tau_t^{ss})W_t \end{aligned}$$

Como podemos observar, el impuesto sobre beneficios desaparece de las condiciones de primer orden, no afectando a las decisiones de la empresa. Este resultado es normal y es consecuencia del hecho de que asumimos que los beneficios son cero, al definir el problema de la empresa en un entorno competitivo. Así, la empresa sigue maximizando beneficios y para ello sigue contratando la misma cantidad de factores productivos independiente de la cuantía del impuesto sobre los beneficios.

Otra posibilidad alternativa consiste en redefinir los beneficios como los ingresos de explotación menos los costes salariales. En este caso los costes de producción serían los costes salariales, estando los costes del capital relacionados con el proceso de inversión. Sin embargo, en la práctica los costes de inversión en capital están excluidos del cálculo del impuesto de sociedades, existiendo además deducciones para los mismos. Así podemos suponer en este caso que el problema que maximiza la empresa es:

$$\max \Pi_t = (1 - \tau_t^b)[Y_t - (1 + \tau_t^{ss})W_t L_t] - R_t K_t \quad (5.19)$$

sujeto a la restricción tecnológica:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (5.20)$$

Si calculamos las condiciones de primer orden para este problema obtenemos:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial K_t} = (1 - \tau_t^b) F_K(K_t, L_t) - R_t = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial L_t} = F_L(K_t, L_t) - (1 + \tau_t^{ss}) W_t = 0 \quad (5.22)$$

Es decir, la condición de equilibrio para el empleo sigue siendo la misma que anteriormente, es decir, la productividad marginal del trabajo es igual al salario bruto que tiene que pagar la empresa, en el cual está incluidas las cotizaciones a la seguridad social:

$$F_L(K_t, L_t) = (1 + \tau_t^{ss}) W_t$$

Por el contrario, ahora cambia la condición de equilibrio para el stock de capital. En este caso, el coste del capital se incrementa debido al impuesto sobre beneficios, tal que:

$$F_K(K_t, L_t) = \frac{R_t}{(1 - \tau_t^b)}$$

Una pregunta que podemos hacernos es quién paga realmente estos impuestos. Vemos que hay tres tipos impositivos que afectan a los consumidores mientras que hemos considerado dos tipos impositivos que afectan a las empresas. Sin embargo, esto no quiere decir que sean estos agentes los que realmente pagan estos impuestos.

Desde el punto de vista teórico los consumidores son los propietarios de las empresas y, por tanto, serían los consumidores los que pagan al Estado todos los impuestos. Sin embargo, también podemos suponer la existencia de empresarios que son los propietarios de las empresas y que no todos los consumidores son empresarios. En este caso podríamos preguntarnos quién paga las cotizaciones a la seguridad social del factor productivo trabajo.

En España las cotizaciones serían un impuesto (aproximadamente del 36%: Los trabajadores pagan el 6% y las empresas el 30%). Pero si suponemos rendimientos constantes a escala ¿quién paga el impuesto y cuál es su cuantía? En este caso lo pagarían los trabajadores.

En un entorno competitivo el salario de los individuos sería:

$$W_t = \frac{F_L(K_t, L_t)}{1,36} = 0,735 F_L(K_t, L_t)$$

o lo que es lo mismo, el salario que cobran los trabajadores es de sólo un 73,5% de lo que cobrarían si no existiesen las cotizaciones a la seguridad social. Esto significa que en realidad los trabajadores están pagando un impuesto sobre su salario de 26,5%, ya antes de que se aplique el impuesto sobre las rentas del trabajo.

Para ver claramente lo que significa la imposición, imaginemos un trabajador cuya productividad es equivalente a 1.000 euros. Este sería su salario bruto antes de ningún tipo de impuesto. Del análisis realizado anteriormente vemos que pagaría (si no es propietario de la empresa) un 26,5% como cotizaciones a la seguridad social, es decir, 265 euros, por lo que el salario bruto que recibiría de la empresa sería de 735 euros. Ahora supongamos que el tipo impositivo sobre la renta salarial es del 34,8% como hemos visto anteriormente. Esto significa que el trabajador debe pagar por IRPF un total de 255,78 euros, es decir su salario neto sería de 479,22 euros. Supongamos ahora que gasta en consumo todo su salario neto. Dado que el tipo impositivo sobre el consumo es del 11,6%, esto significa que paga por impuestos indirectos un total de 55,59 euros, por lo que la cantidad de consumo que puede realizar es de 423,63 euros, es decir, un 42% del salario bruto inicial que debería cobrar, o lo que es lo mismo, el tipo impositivo total sobre la productividad marginal que debe pagar este trabajador es del 58%.

Tabla 5.2. Productividad marginal del trabajo y consumo final

Renta bruta inicial (Productividad marginal)	1.000,00
<i>Cotizaciones Seguridad Social (36%)</i>	<i>-265,00</i>
Renta bruta salarial	735,00
<i>IRPF (34,8%)</i>	<i>-255,78</i>
Salario neto	479,22
<i>Impuesto sobre el consumo (11,6%)</i>	<i>-55,59</i>
Consumo final	423,63

5.3 El gasto público

La otra vertiente que define la actividad del gobierno es el gasto. Así, el gobierno obtiene unos determinados ingresos públicos que, sumados a la deuda pública, van a determinar las posibilidades de gasto del gobierno. Este gasto público viene determinado por las

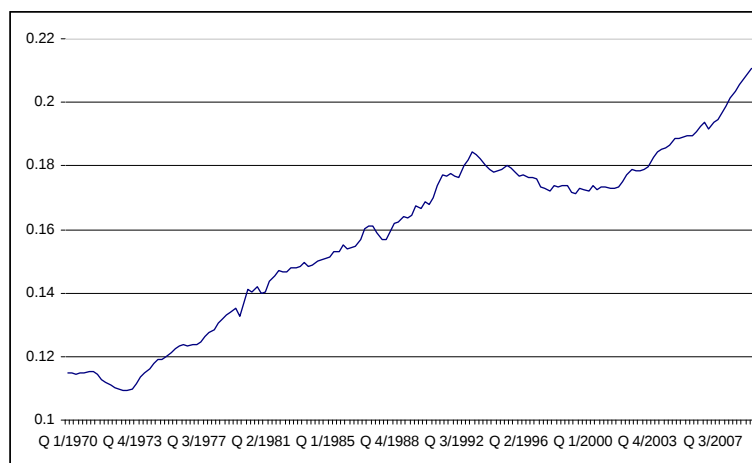


Figura 5.3. Porcentaje del gasto público respecto al PIB

decisiones del gobierno tanto en relación a su volumen como a la tipología de dicho gasto. En la figura 5.6 mostramos la evolución del gasto público como porcentaje del PIB para la economía española. Como podemos comprobar el peso del sector público en la economía ha ido aumentando constantemente con el paso del tiempo y tan sólo ha disminuido ligeramente durante la década de los noventa. De este modo el peso del sector público ha pasado de representar menos del 12% del PIB a principios de los setenta, hasta más del 20% en la actualidad.

El gasto del gobierno lo vamos a dividir en el gasto corriente y de inversión por un lado, y el gasto para pagar los intereses y la amortización de la deuda pública por el otro. De hecho observamos en la práctica que la mayoría de gobiernos están endeudados, es decir, el saldo vivo de la deuda pública es positivo. Esto significa que periodo a periodo el gobierno debe dedicar una proporción de sus recursos a pagar la rentabilidad de dicho saldo vivo de la deuda pública y, en su caso, a pagar la amortización de la misma.

La tabla 5.3 muestra la ratio de deuda pública respecto al PIB para un grupo de países correspondiente al año 2007. Como podemos observar, este porcentaje difiere significativamente entre

países. Irlanda y Dinamarca muestran porcentajes relativamente bajos, en torno al 25% del PIB. Por el contrario países como Italia presentan un

Tabla 5.3. Deuda pública como porcentaje del PIB

País	Deuda pública/PIB
Alemania	65,1
Dinamarca	26,8
España	36,2
Francia	63,8
Grecia	94,8
Irlanda	25,0
Italia	103,5
Reino Unido	44,2

El gasto público puede ser de dos tipos: gasto corriente en bienes y servicios, que van a ser bienes que consumen los individuos y que forman parte de su función de utilidad y gasto en inversión. Mientras que el primer tipo de gasto afecta al consumo total de los individuos, afectando a la utilidad que reciben, el segundo tipo de gasto afecta a la función de producción de la economía. Así el gasto total que realiza este agente tiene la misma estructura que el de los consumidores: o lo consume o lo ahorra y lo invierte en activos de capital, tal que:

$$G_t = C_{G,t} + I_{G,t}$$

donde $C_{G,t}$ es el gasto en consumo corriente e $I_{G,t}$ es el gasto en inversión pública. A continuación vamos a estudiar cómo ambos componentes del gasto público tienen implicaciones muy diferentes sobre el comportamiento de la economía.

5.3.1 Gasto corriente

El gasto corriente público hace referencia a determinados bienes y servicios que forman parte del consumo total de los individuos y que son aportados por el estado. En este caso, la función de utilidad de los consumidores la podemos definir como:

$$U(C_t) = U(C_{P,t}, C_{G,t})$$

implicando que el consumidor recibe utilidad de todos los bienes que consumen, ya sean de carácter privado o de carácter público. Dado que los bienes de carácter privado pueden no ser sustitutivos de los bienes de carácter público, el consumo total del individuo podríamos definirlo como:

$$C_t = \left[\omega C_{P,t}^\eta + (1 - \omega) C_{G,t}^\eta \right]^{\frac{1}{\eta}}$$

donde η es un parámetro que representa la elasticidad de sustitución entre bienes privados y bienes públicos. En este caso el consumidor determinaría la cantidad de bienes privados que quiere consumir, dada una cantidad de bienes públicos. El problema a maximizar sería en este caso:

$$\text{Max}_{\{C_t, L_t\}_t^\infty} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\begin{array}{c} \gamma \log \left(\left[\omega C_{P,t}^\eta + (1 - \omega) C_{G,t}^\eta \right]^{\frac{1}{\eta}} \right) \\ + (1 - \gamma) \log (N_t \bar{H} - L_t) \end{array} \right]$$

sujeito a la restricción presupuestaria intertemporal dada por:

$$(1 + \tau_t^c) C_t + K_{t+1} - K_t = (1 - \tau_t^l) W_t L_t + (1 - \tau_t^k) (R_t - \delta) K_t + G_t$$

La restricción del gobierno vendría dada por:

$$G_t = \tau_t^c C_t + \tau_t^l W_t L_t + \tau_t^k (R_t - \delta) K_t - C_{G,t}$$

Las condiciones de primer orden del problema de las familias vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_P} : \beta^t \left[\frac{\gamma \eta \omega C_{P,t}^{\eta-1}}{(1 + \tau_t^c) \left[\omega C_{P,t}^\eta + (1 - \omega) C_{G,t}^\eta \right]} - \lambda_t \right] = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} : -\beta^t \left[(1 - \gamma) \frac{1}{N_t \bar{H} - L_t} + \lambda_t (1 - \tau_t^l) W_t \right] = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} : E_t \beta^t \lambda_t \left[(1 - \tau_t^k) (R_t - \delta) + 1 \right] - \lambda_{t-1} \beta^{t-1} = 0 \quad (5.25)$$

Por lo que ahora el precio sombra del consumidor viene definido por:

$$\lambda_t = \frac{\gamma\eta\omega C_{P,t}^{\eta-1}}{(1 + \tau_t^c) [\omega C_{P,t}^\eta + (1 - \omega)C_{G,t}^\eta]}$$

El problema anterior podemos resolverlo en términos de la decisión de los consumidores respecto al consumo privado, mientras que el consumo público viene determinado exógenamente por la decisión del gobierno. En este caso, se produciría una pérdida de bienestar del individuo, ya que sólo puede determinar una parte de su consumo. También podemos resolverlo en términos de un agente que decide qué cantidad tanto de consumo privado como de consumo público va a realizar nuestro consumidor representativo.

Otra forma alternativa de considerar el efecto del gasto público en la función de utilidad de los consumidores consiste en definir el consumo total como:

$$C_t = C_{P,t} + \pi C_{G,t} \quad (5.26)$$

donde π es un parámetro que mide la aportación del gasto público a la unidad marginal del consumo. En este caso tenemos que el consumo total del individuo es una combinación lineal del consumo privado y del consumo público. En este caso la elasticidad de sustitución entre ambos tipos de bienes es constante, y viene determinada por el parámetro π . La especificación anterior indica que el gsto público puede influir la utilidad de los consumidores siempre que π sea distinto de cero. Si $\pi > 0$, la utilidad marginal del consumo disminuye con un aumento en el gasto público. Lo contrario ocurre si $\pi < 0$. Así, una unidad de bien público reportaría la misma utilidad que π unidades de consumo privado. De nuevo el consumo público provocaría un desplazamiento del consumo privado. El efecto sobre el bienestar de los consumidores va a depender del parámetro π . Si π es igual a la unidad, el consumo total del individuo y, por tanto, su nivel de bienestar no cambiaría. Esto es así porque un parámetro igual a la unidad implica que la utlidad de los bienes públicos es la misma que la de los bienes privados. Sin embargo, en el caso en que este parámetro tome un valor inferior a la unidad entonces el consumo público tendría efectos negativos sobre el nivel de bienestar del individuo.

5.3.2 Gasto en inversión

El otro tipo de gasto que puede realizar el gobierno es inversión en capital público. Parte del capital productivo que utiliza una economía es capital público, por lo que las decisiones que se tomen a este respecto van a afectar al comportamiento de la economía, en este caso por el lado de la producción. Este tipo de gasto público puede aumentar la productividad marginal de los factores productivos privados y, por tanto, tener efectos sobre el nivel de producción agregado de la economía. Si el capital público tiene efectos positivos sobre la producción de la economía, entonces la política fiscal que implique aumentos de la inversión pública va a resultar beneficiosa. Este tipo de gastos comprenden los gastos en el marco legal e institucional (gastos en justicia, en policía, etc.), gastos en infraestructuras de transporte y de comunicaciones, gastos en protección del medio ambiente, gastos en I+D, etc.

Un elemento importante a tener en cuenta es que en este caso no estaríamos hablando de política fiscal de demanda, que es el sentido habitual en el que se considera a la política fiscal, sino como política fiscal de oferta. En este caso, esta política fiscal entraría en la demanda agregada como un gasto más del gobierno, pero sus implicaciones económicas vendrían por el lado de la oferta, al alterar la productividad de los factores de producción privados.

En este caso la función de producción de la economía sería:

$$Y_t = F(K_t, L_t, K_{G,t}) \quad (5.27)$$

donde $K_{G,t}$ es el stock de capital público. Por tanto, ahora existirían tres factores productivos en el proceso de producción de las empresas: camiones, camioneros y carreteras.

El proceso de acumulación del stock de capital público es similar al del capital privado:

$$K_{G,t} = (1 - \delta_G)K_{G,t-1} + I_{G,t} \quad (5.28)$$

En este caso, tendríamos que la empresa obtendría beneficios extraordinarios, dado que utiliza un factor productivo por el que no paga de forma directa. Así en este caso la función de beneficios de la empresa sería:

$$\Pi_t = F(K_t, L_t, K_{G,t}) - W_t L_t - R_t K_t \quad (5.29)$$

Podemos suponer que la función de producción es:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^\gamma K_{G,t}^\phi \quad (5.30)$$

En el caso estándar tenemos que $\gamma = 1 - \alpha$ y $\phi = 0$. Sin embargo, si consideramos la existencia de capital público, resulta que ahora la producción se ve afectada positivamente por la existencia de este input adicional. La aportación del capital público a la producción vendría dado por el valor del parámetro ϕ . Cuanto mayor sea este parámetro mayor será la importancia del capital público en la producción agregada de la economía.

5.4 La equivalencia ricardiana

La equivalencia ricardiana tiene su origen en los desarrollos realizados por David Ricardo en el siglo XIX. David Ricardo se planteó cual era la mejor forma de financiar una guerra. La financiación por parte del estado de un determinado gasto puede ser de dos formas: vía impuestos o vía deuda pública. La respuesta que obtuvo es que da igual dando lugar al denominado teorema de la irrelevancia en la forma de financiar el déficit público. La explicación hay que encontrarla en el hecho de que un mayor déficit público hoy va a implicar mayores impuestos en el futuro. Por tanto, la única elección consiste en qué momento del tiempo se van a aumentar los impuestos para financiar la guerra. Esto hace que la decisión anterior sea irrelevante. Si se financia vía deuda pública esto significa que en el futuro aumentarán los impuestos para financiar dicha deuda, lo que es equivalente a financiarla vía impuestos en el momento actual.

Detrás de este razonamiento está el hecho de que el ciclo vital de los individuos es infinito. Es decir, los individuos pueden tener vida finita, como ocurre en la realidad, pero toman decisiones de carácter económico como si su vida fuese infinita. El hecho de que los individuos tengan vida infinita hace que durante su ciclo vital se cumpla la restricción presupuestaria del gobierno, por lo que la política fiscal es irrelevante. O lo que es lo mismo, es irrelevante como se financie el gobierno, ya que la deuda pública es equivalente a los impuestos. Por tanto, resulta vital analizar con un poco más de detenimiento el concepto de ciclo vital asociado a los consumidores. Un elemento que tenemos que tener en cuenta es que los individuos

tienen descendencia y se preocupan de dicha descendencia. Esto hace que al valor los efectos de las decisiones sobre el futuro, no sólo tengan en cuenta el futuro del propio individuo, sino también el futuro de sus hijos, más allá de su propia existencia. Es este hecho el que provoca que la vida de los individuos sea infinita desde el punto de vista económico y la forma de financiar el gasto público sea irrelevante

Detrás de este comportamiento está la importancia del altruismo de los agentes. Tal y como hemos apuntado anteriormente, los agentes son egoistas, en el sentido que toman decisiones pensando en su propio bienestar. Y tiene que ser así. Esto significa que cualquier acción que tome un individuo tiene como objetivo conseguir una satisfacción personal. Este es el enfoque que hemos utilizado en el análisis realizado anteriormente. Sin embargo, ahora vamos a introducir un elemento adicional, y es que nuestro individuo tiene hijos y que además le importan sus hijos. Esto se traduce en que la función de utilidad de este individuo no sólo tiene en cuenta su propia satisfacción en términos del consumo que realiza, sino que también forma parte de su felicidad la felicidad de sus hijos. Por tanto, la utilidad de los hijos entra en la función de utilidad de sus padres, lo que es equivalente a decir que el consumo de los hijos forma parte de la utilidad de los padres. Como a su vez estos hijos van a tener también hijos (nuestro agente tendrá nietos y por tanto será abuelo) esto significa que nuestro agente al preocuparse por el bienestar de sus hijos también se preocupa por el bienestar de sus nietos (al preocuparte siempre los padres por los hijos).

Relaciones intergeneracionales (de padres a hijos o de hijos a padres). Si las generaciones presentes valoran la felicidad de sus hijos, su función de utilidad no depende únicamente del consumo individual sino también del de su hijo. De hecho, esto implica que la vida del individuo es infinita, desde el punto de vista económico, ya que en su función de utilidad no sólo entra su propio nivel de consumo, sino también los consumos de todas las generaciones futuras. Por tanto, la clave de suponer que los individuos tienen vida infinita proviene del hecho de que existe una sucesión dinástica que no se corta en ningún momento del tiempo.

Un aspecto que vamos a estudiar es la existencia de herencias por motivos altruistas. Esto significa que los padres van a transferir una renta a sus hijos sin esperar a que éstos se la devuelvan. La

explicación de este comportamiento de nuevo hay que buscarla en el hecho de que la felicidad de los hijos forma parte de la felicidad de los padres.

5.4.1 *El modelo de generaciones solapadas*

Vamos a introducir un tipo de modelización que se denomina modelo de generaciones solapadas. Un modelo de generaciones solapadas consiste definir una estructura poblacional en la cual los agentes que viven un número finito de periodos (por ejemplo 2 periodos) y pueden tener hijos. En cada momento del tiempo existen dos generaciones: los jóvenes y los viejos, donde los viejos son los padres de los jóvenes. Suponemos que los jóvenes trabajan y que la generación vieja está jubilada.

Para un individuo que nace en el momento t tendríamos que la función a maximizar es:

$$U(C_{1,t}) + \frac{U(C_{2,t+1})}{1 + \theta} \quad (5.31)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$C_{1,t} + S_t = Y_{1,t} \quad (5.32)$$

$$C_{2,t+1} = S_t(1 + R_t) \quad (5.33)$$

El subíndice 1 indica que el individuo es joven y el subíndice 2 indica que es viejo. Vamos a suponer que este individuo tiene hijos en el paso de joven a viejo: Si hijo sería 1, cuando este individuo fuese 2. A esto es lo que se denomina un modelo de generaciones solapadas. Por tanto, podemos definir las siguientes variables:

$C_{1,t}$: consumo de un individuo que pertenece a la generación t . Es joven en el momento t .

$C_{2,t}$: consumo de un individuo que pertenece a la generación $t - 1$. Es viejo en el momento t , por lo que éste es el padre del anterior.

$C_{2,t+1}$: consumo de un individuo que es viejo en el momento $t + 1$, es decir, pertenece a la generación t .

$C_{1,t+1}$: Consumo de un individuo que pertenece a la generación $t + 1$. Este es el hijo de la generación t .

La estructura poblacional en un modelo de generaciones solapadas de dos periodos viene dada en la tabla 5.4, en la que podemos

observar la existencia de dos generaciones de forma simultánea y que están unidas por un vínculo familiar. Así, nuestro agente representativo nace en el momento t y muere en el momento $t + 1$. En el periodo de tiempo en el que nuestro agente es joven vive con su padre, que es viejo. Por otra parte, cuando nuestro agente es viejo vive con su hijo. Esta estructura de la población indica también que nuestro agente no conoce ni a su abuelo ni a su nieto.

Tabla 5.4: Estructura poblacional

	$t - 1$	t	$t + 1$	$t + 2$	...
Abuelo	Viejo				
Padre	Joven	Viejo			
Agente		Joven	Viejo		
Hijo			Joven	Viejo	
Nieto				Joven	...

5.4.2 Las herencias

Un comportamiento que observamos en la realidad, más en unas economías que en otras, es la existencia de herencias, esto es, los individuos dejan una determinada cantidad de renta a sus hijos. Este elemento tiene importantes consecuencias económicas, dado que supone que los padres se preocupan del bienestar de sus hijos. Así, en el problema básico, el individuo maximiza su utilidad a lo largo de todo el ciclo vital y para ello debe cumplirse la condición de que al final de su ciclo vital la cantidad de activos que posee el individuo debe ser cero. Sin embargo, la existencia de herencias implica que la cantidad de activos que posee el individuo cuando finaliza su vida es positivo, por lo que no estaría maximizando su utilidad. Por tanto, debe de haber algún tipo de explicación de este comportamiento, que puede ser racional. De hecho, vamos a comprobar que dicho comportamiento puede ser óptimo desde el punto de vista de la maximización de la utilidad si dentro de la función de utilidad del individuo aparece la utilidad de sus hijos.

Esto lleva también a que la vida de los individuos sea infinita en términos económicos, dado que al tener en cuenta el bienestar de sus hijos esto significa que el entorno temporal de referencia para la toma de decisiones es superior a su propio ciclo vital. De hecho

podemos ir resolviendo hacia adelante e ir comprobando que la vida del individuo cada vez es más larga. En efecto, si dentro de su bienestar se encuentra el bienestar de sus hijos y, a su vez, dentro del bienestar de los hijos se encuentra el de los hijos de éstos, entonces dentro del bienestar del individuo se encuentra el bienestar de sus nietos. Como estos nietos también tienen hijos, esto significa que también se preocuparía de sus bisnietos, y así, de forma indefinida. Es decir, el enfoque temporal del individuo es infinito.

A continuación vamos a estudiar el problema del consumidor pero introduciendo las herencias. Las herencias suponen una transferencia de renta intergeneracional sin que exista una contrapartida a la misma. Nuestro interés se centra en estudiar qué factores son los que determinan esta decisión.

El problema a maximizar con herencias sería el siguiente, donde aparece la utilidad de la generación futura dentro de la función de utilidad de la generación actual, debido a la existencia de un vínculo familiar:

$$\max V_t = U(C_{1,t}) + \frac{U(C_{2,t+1})}{1 + \theta} + \frac{V_{t+1}}{1 + \rho} \quad (5.34)$$

sujeito a:

$$C_{1,t} + S_t = Y_{1,t} + H_t \quad (5.35)$$

$$C_{2,t+1} + H_{t+1} = S_t(1 + R_t) \quad (5.36)$$

donde V_{t+1} es la utilidad de los hijos, H_t es la herencia que ha recibido el agente de la generación t , H_{t+1} es la herencia que va a dejar el agente a sus hijos y ρ nos mide la ponderación de la utilidad de las generaciones futuras en la utilidad actual. Suponemos que las herencias son cantidades positivas. Por otra parte, cuanto más pequeño sea el parámetro ρ más valora un padre la felicidad de sus hijos. Suponemos que $\rho > 0$, es decir, los agentes descuentan la felicidad de sus hijos a la hora de valorar su propia felicidad, en términos del periodo 1. Como se preocupan los individuos del bienestar futuro de sus hijos en relación a la preocupación de su propio bienestar futuro va a depender de como sea el parámetro θ en relación al parámetro ρ .

Ahora la elección es triple: El agente tiene que decidir cuanto consume en cada periodo y cuanta herencia deja a sus hijos. Podemos

utilizar este problema para responder a ciertas preguntas. En primer lugar, podemos preguntarnos si la senda óptima de consumo del agente se ve alterada por la presencia de hijos. En segundo lugar, podemos estudiar si es óptimo dejarle herencia a los hijos, y cuáles son los factores determinantes del volumen de herencia que le deja un padre a un hijo, cómo se ve afectada la herencia que un padre deja a su hijo por la herencia que este recibió a su vez de su padre, etc.

En primer lugar, vamos a demostrar porqué decimos que los agentes tienen vida infinita. El problema a maximizar de un agente que nace en t es:

$$\max V_t = U(C_{1,t}) + \frac{U(C_{2,t+1})}{1+\theta} + \frac{V_{t+1}}{1+\rho} \quad (5.37)$$

es decir, la utilidad de sus hijos a lo largo de todo su ciclo vital forma parte de la propia utilidad del individuo. Es decir, el periodo temporal al que hace referencia la función anterior va desde t hasta $t+2$. Pero resulta que, a su vez, la función de utilidad de los hijos de nuestro individuo puede definirse como:

$$V_{t+1} = U(C_{1,t+1}) + \frac{U(C_{2,t+2})}{1+\theta} + \frac{V_{t+2}}{1+\rho}$$

es decir, aparece a su vez la utilidad de los hijos de éste. Sustituyendo en el problema original obtenemos que:

$$\max V_t = U(C_{1,t}) + \frac{U(C_{2,t+1})}{1+\theta} + \frac{U(C_{1,t+1}) + \frac{U(C_{2,t+2})}{1+\theta} + \frac{V_{t+2}}{1+\rho}}{1+\rho}$$

o equivalentemente:

$$\max V_t = U(C_{1,t}) + \frac{U(C_{2,t+1})}{1+\theta} + \frac{U(C_{1,t+1})}{1+\rho} + \frac{U(C_{2,t+2})}{(1+\rho)(1+\theta)} + \frac{V_{t+2}}{(1+\rho)^2}$$

es decir, ahora aparece dentro de la función de utilidad de nuestro individuo la función de utilidad de sus nietos. Esto significa que ahora el periodo temporal en el que está definido el problema va desde t hasta $t+3$, dado que sus nietos nacen en el periodo $t+2$ y viven hasta el periodo $t+3$. Este proceso lo podemos realizar hasta el infinito lo que implica que el periodo temporal en el cual

viene definido el problema original es infinito. Por tanto, la vida de nuestro agente es infinita.

A continuación, vamos a resolver el problema planteado, cuyo Langragiano lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \max V_t = & U(C_{1,t}) + \frac{U(C_{2,t+1})}{1+\theta} + \frac{V_{t+1}}{1+\rho} \\ & - \lambda_t \left(C_{1,t} + \frac{C_{2,t+1}}{1+R_t} - Y_{1,t} - H_t + \frac{H_{t+1}}{1+R_t} \right) \end{aligned}$$

Como podemos observar, ahora el individuo toma dos decisiones: cuál va a ser su senda de consumo y que cantidad de herencia le va a dejar a sus hijos. Las condiciones de primer orden respecto a los niveles de consumo en cada periodo vienen dadas por la siguientes expresiones:

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{1,t}} = U'(C_{1,t}) - \lambda_t = 0 \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial C_{2,t+1}} = \frac{U'(C_{2,t+1})}{1+\theta} - \frac{\lambda_t}{1+R_t} = 0 \quad (5.39)$$

Operando en las condiciones de primer orden obtenemos que el precio sombra del consumo es::

$$\lambda_t = U'(C_{1,t})$$

Sustituyendo en la condición de primer orden para el consumo en el segundo periodo, resulta en la senda óptima de consumo, ya obtenida en el problema estándar:

$$U'(C_{1,t}) = \frac{1+R_t}{1+\theta} U'(C_{2,t+1}) \quad (5.40)$$

Esto significa que la introducción de los hijos y de las herencias no altera el comportamiento del individuo en términos de su senda óptima de consumo. Es decir, la senda óptima de consumo a lo largo de la vida del individuo sigue dependiendo de las mismas variables.

Vamos ahora a maximizar respecto a la herencia. Para ello definimos nuestra función a maximizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \max \dots + U(-S_t + Y_{1,t} + H_t) + \frac{U(-H_{t+1} + S_t(1 + R_t))}{1 + \theta} \\ & + \frac{U(-S_{t+1} + Y_{1,t+1} + H_{t+1})}{1 + \rho} + \dots \end{aligned}$$

Derivando respecto a la herencia que nuestro individuo le deja a sus hijos obtenemos:

$$-\frac{U'(C_{2,t+1})}{1 + \theta} + \frac{U'(C_{1,t+1})}{1 + \rho} = 0 \quad (5.41)$$

por lo que resulta que:

$$U'(C_{2,t+1}) = \frac{1 + \theta}{1 + \rho} U'(C_{1,t+1}) \quad (5.42)$$

La expresión anterior nos indica que la cantidad de herencia que deja un padre al hijo se obtiene comparando la utilidad que recibe el padre de utilizar dicha renta en consumirla él mismo, respecto a la que obtendría el hijo si el consumo lo realizase éste, ponderada por su importancia en la función de utilidad del agente. Este factor de ponderación depende de dos parámetros θ y ρ . Cuanto mayor sea el parámetro θ mayor tiene que ser la utilidad marginal de agente en el segundo periodo de su vida en relación a la utilidad de su hijo. Vemos por tanto que cuanto mayor sea el parámetro θ , mayor va a ser la utilidad del agente en el segundo periodo, es decir, su nivel de consumo va a ser pequeño, por lo que el valor de este parámetro tiene un efecto positivo sobre la herencia. Por otra parte, la herencia también va a depender del valor del parámetro ρ . Si este parámetro es muy grande, esto significa que la utilidad marginal del agente en el periodo 2 tiene que ser muy pequeña, es decir, su nivel de consumo va a ser muy elevado. Esto significa que el agente va a dejar poca herencia a sus hijos.

Por tanto, de la resolución del problema anterior obtenemos las siguientes soluciones:

$$U(C_{1,t}) = \frac{1 + R_t}{1 + \theta} U(C_{2,t+1}) \quad (5.43)$$

$$U(C_{2,t+1}) = \frac{1 + \theta}{1 + \rho} U(C_{1,t+1}) \quad (5.44)$$

Y combinando las dos anteriores también resulta:

$$U(C_{1,t}) = \frac{1 + R_t}{1 + \rho} U(C_{1,t+1}) \quad (5.45)$$

La expresión anterior compara la utilidad marginal del agente en el primer periodo de su vida con la utilidad marginal de su hijo, también en el primer periodo de su vida. Comparando ambas utilidades marginales, el volumen de herencia que el padre le dejará al hijo dependerá tanto del parámetro ρ , de la forma señalada anteriormente, como del tipo de interés real. En este caso obtenemos que cuanto mayor sea el tipo de interés real, mayor será la utilidad marginal del consumo del agente, por lo que menor será su nivel de consumo en este periodo y mayor la utilidad marginal del consumo de su hijo.

5.5 Sistemas de Seguridad Social

En esta sección vamos a estudiar las implicaciones de los sistemas de seguridad social sobre el comportamiento de una economía y sus implicaciones en relación a la política fiscal. En términos generales tenemos dos sistemas diferentes de seguridad social que puede adoptar una determinada economía:

- Sistema de capitalización.
- Sistema de reparto.

El sistema de capitalización supone que los pagos a la Seguridad Social que realizan los trabajadores va a un fondo de inversión que obtiene una rentabilidad igual al tipo de interés real. Es decir, los individuos realizan un determinado ahorro obligatorio, del cual se obtiene una determinada rentabilidad y que va a servir para pagar la jubilación del propio individuo. Por el contrario, los sistemas de reparto implican que el pago a la Seguridad Social que realizan los trabajadores va destinado directamente al pago de las pensiones de los que están jubilados. A su vez, los trabajadores actuales cuando se jubilen en el futuro, recibirán una pensión proveniente del pago que realizan los futuros trabajadores al sistema.

En la actualidad existe un importante debate en torno a qué sistema de Seguridad Social es mejor y cuales son los riesgos

asociados a cada uno de ellos. En la actualidad la mayoría de países tienen sistemas de reparto, aunque también hay una gran cantidad de países con sistemas de capitalización. Es importante tener en cuenta que o bien un país adopta un sistema de Seguridad Social de reparto o bien de capitalización pero no es posible una combinación de ambos de forma simultánea. En la actualidad existe un gran debate en muchos países con sistemas de reparto, principalmente debido a los efectos que se derivan del envejecimiento de la población. Vamos a continuación a analizar las implicaciones de ambos tipos de sistemas.

5.5.1 *Sistemas de Seguridad Social de capitalización*

Un sistema de Seguridad Social de capitalización consiste en un sistema en el cual los individuos tienen un plan de pensiones obligatorio, con unas determinadas aportaciones obligatorias al mismo. Esta contribución se realiza mientras están trabajando y una vez se jubilen obtienen las cantidades aportadas al mismo más la rentabilidad generada. De este modo son sus propias cotizaciones las que financiarán su pensión futura.

Durante su vida laboral ingresan en el fondo una cantidad D_t . Cuando se jubilan perciben la cantidad $D_t(1 + R_t)$. Tal y como vamos a observar, este sistema de Seguridad Social no afecta a las decisiones de los individuos. Esto va a ser así porque las cotizaciones a la Seguridad Social son sustitutivos perfectos del ahorro privado. Por tanto, en ese caso un cambio por parte del gobierno de las cotizaciones a la seguridad social no va a tener implicaciones sobre la economía, ya que no influye en las decisiones del individuo.

El problema que resolvería un consumidor que viene dos periodos bajo un sistema de Seguridad Social de capitalización sería el siguiente:

$$\max U(C_{1,t}) + \beta U(C_{2,t+1}) \quad (5.46)$$

sujeto a las siguientes restricciones presupuestarias:

$$C_{1,t} + S_{1,t} + D_{1,t} = W_{1,t} \quad (5.47)$$

$$C_{2,t+1} = (1 + R_t)S_{1,t} + (1 + R_t)D_{1,t} \quad (5.48)$$

Para construir la restricción presupuestaria intertemporal del individuo tenemos que despejar de la restricción del periodo 1, tanto

el nivel de ahorro como las aportaciones a la seguridad social. Así tendríamos que:

$$S_{1,t} + D_{1,t} = W_{1,t} - C_{1,t} \quad (5.49)$$

mientras que la restricción del segundo periodo la podemos escribir como:

$$C_{2,t+1} = (1 + R_t)(S_{1,t} + D_{1,t}) \quad (5.50)$$

Sustituyendo obtenemos que la restricción presupuestaria intertemporal vendría dada por:

$$C_{2,t+1} = (1 + R_t)(W_{1,t} - C_{1,t}) \quad (5.51)$$

restricción que es exactamente igual a la que obtendríamos sin tener en cuenta el sistema de Seguridad Social.

Esto significa que los sistemas de seguridad social de capitalización no tienen ningún efecto sobre las decisiones de los individuos. Así, podemos aumentar o disminuir las aportaciones a la seguridad social sin que esto tenga ningún efecto sobre la decisión de los individuos. Esto es así porque las aportaciones a la seguridad social son sustitutivos perfectos del ahorro privado del individuo.

5.5.2 *Sistemas de Seguridad Social de reparto*

A continuación vamos a realizar el mismo análisis pero en el caso de que el Sistema de Seguridad social sea de reparto. En la práctica, este es el sistema más común y, por ejemplo, es el sistema que tenemos en España.

En este caso las cotizaciones de los trabajadores se transforman directamente en pensiones para los jubilados. Así, las pensiones que están recibiendo los jubilados en el momento actual provienen de las contribuciones que actualmente están realizando el sistema los trabajadores. Esto significa que la pensión futura de un trabajador de hoy depende de las cotizaciones de los trabajadores futuros.

Como podemos intuir, en el caso de un sistema de reparto la dinámica de la población, concretamente la de la población trabajadora, es muy importante. En este caso las cotizaciones a la Seguridad Social si tienen efectos sobre las decisiones de los individuos.

El problema que resolvería un consumidor que viene dos periodos sería:

$$\max U(C_{1,t}) + \beta U(C_{2,t+1})$$

sujeto a:

$$C_{1,t} + S_{1,t} + D_{1,t} = W_{1,t} \quad (5.52)$$

$$C_{2,t+1} = (1 + R_1)S_{1,t} + D_{2,t+1} \quad (5.53)$$

En este caso, la restricción presupuestaria intertemporal del individuo sería:

$$C_{2,t+1} = (1 + R_1)(W_{1,t} - C_{1,t} - D_{1,t}) + D_{2,t+1} \quad (5.54)$$

por lo que los recursos totales del individuo van a depender de cuál sea la pensión que va a cobrar una vez está jubilado, información que el individuo en la realidad no conoce hasta que no se jubila. De qué depende esta cantidad. Va a depender fundamentalmente de la cantidad de trabajadores, y de las aportaciones de éstos al sistema, que exista cuando este individuo esté jubilado. Es decir, las pensiones futuras en un sistema de seguridad social de reparto están muy condicionadas por la dinámica de la población. Esto ha provocado que temas como el envejecimiento de la población o el fenómeno de la inmigración sean de gran relevancia a la hora de estudiar la sostenibilidad de los actuales sistemas de seguridad social de reparto.

Una vez analizadas las implicaciones de ambos sistemas de seguridad social, a continuación vamos a compararlos. La pensión resultante del sistema en régimen de capitalización sería:

$$(1 + R_t)D_{1,t}$$

mientras que la pensión resultante del régimen de reparto sería:

$$D_{2,t+1}$$

Si se cumple que $(1 + R_t)D_{1,t} = D_{2,t+1}$, ambos sistemas son equivalentes (pero con distintos efectos sobre la política fiscal). Por el contrario si $(1 + R_t)D_{1,t} < D_{2,t+1}$, el sistema de reparto es mejor que el sistema de capitalización al proporcionar una mayor pensión.

Si $(1 + R_t)D_{1,t} > D_{2,t+1}$, las pensiones son mayores en el régimen de capitalización. De qué depende el valor de las pensiones en el sistema de reparto. Suponiendo que el impuesto que determina las cotizaciones a la seguridad social sea constante, va a depender de cómo sean los salarios y, principalmente, del número de trabajadores, es decir, del crecimiento de la población (dado que equiparamos población a trabajadores). Si definimos como n el crecimiento de la población, resulta que las pensiones en un sistema de reparto vendrían dadas por:

$$D_{2,t+1} = (1 + n)D_{1,t}$$

Por tanto, la pensión de un sistema respecto al otro va a depender de la diferencia entre la tasa de crecimiento de la población y el tipo de interés real. Si resulta que $n > R$, es decir, la tasa de crecimiento de la población es elevada o el tipo de interés es muy bajo, entonces el régimen de reparto es mejor que el régimen de capitalización. Por el contrario si $n < R$, es decir, la tasa de crecimiento de la población es muy baja entonces sería preferible el sistema de capitalización.

Del análisis anterior resulta de vital importancia el crecimiento de la población (bien de forma natural o a través de la inmigración) para el mantenimiento de los sistemas de Seguridad Social de reparto. Una economía que no crezca y cree empleo tendrá dificultades para soportar un sistema de seguridad social de reparto. Por otra parte, también existe cierto debate sobre la forma de calcular las pensiones en un sistema de reparto. En el sistema de capitalización está claro como se determina el importe de la pensión: en función de la rentabilidad generada por las aportaciones al fondo de pensiones. Sin embargo, en un sistema de reparto, la decisión sobre el importe de la pensión depende de la decisión del gobierno. Así, en el caso de España, para el cálculo de la pensión se utiliza información sobre únicamente los últimos 15 años que ha trabajado el individuo, en lugar de su salario de toda su vida laboral como ocurre en otros países. Por otra parte, existe un nivel mínimo, que garantiza que aquellos individuos que hayan tenido salarios bajos durante los últimos 15 años de vida laboral puedan acceder a una pensión más o menos digna, lo que supone que la pensión que reciben los jubilados no es una función lineal de las aportaciones realizadas al sistema durante su etapa laboral.

6

El modelo básico de equilibrio general dinámico

- 6.1. Introducción
- 6.2. Los consumidores
- 6.3. Las empresas
- 6.4. Equilibrio del modelo
- 6.5. El modelo con impuestos
- 6.6. Ampliaciones al modelo básico

6.1 Introducción

En este tema vamos a describir las características básicas del modelo de equilibrio general dinámico que se usa en el análisis macroeconómico actual en su versión más simple. Este modelo fue inicialmente desarrollado por Ramsey a finales de los años veinte del siglo pasado y constituye la espina dorsal del análisis económico en la actualidad, siendo la herramienta básica para la realización

de simulaciones de política económica y para determinar los efectos dinámicos de distintas perturbaciones sobre la economía. Para la construcción de este modelo macroeconómico vamos a poner en un mismo contexto los diferentes agentes analizados anteriormente: consumidores, empresas y gobierno.

La estructura de este modelo en su versión más básica es relativamente simple aunque da lugar a una dinámica altamente compleja derivada de los efectos de equilibrio general. Consta de la descripción del comportamiento de los dos tipos de agentes que existen en una economía: familias o consumidores por un lado y empresas por el otro. A estos agentes privados se les añade el comportamiento del gobierno. Así, en la realidad existe un número muy grande de consumidores o familias (millones de agentes) que vamos a suponer que son idénticas. Esto nos va a permitir hablar del consumidor o la familia representativa. Por otra parte, existe un gran número de empresas (millones de agentes) que vamos a suponer que son idénticas. Esto nos va a permitir hablar de la empresa representativa. De forma adicional, en las economías existe un tercer agente, que es el gobierno, que introduciremos en nuestro análisis con posterioridad. Esta estructura de agentes puede ser ampliada, introduciendo la figura de los empresarios, del banco central, del sistema financiero, etc.

El resultado que vamos a obtener de la interacción de los diferentes agentes lo llamamos Equilibrio General Dinámico, dado que todas las variables se determinan endógenamente y en un contexto dinámico. Este resultado va a venir derivado de las decisiones que van a tomar cada uno de los diferentes agentes económicos. Vamos a desarrollar nuestro análisis suponiendo la existencia de competencia perfecta, por lo que al equilibrio resultante lo vamos a denominar Equilibrio General Competitivo.

En este contexto el funcionamiento de la economía es como sigue: Los consumidores toman decisiones de cuanto van a consumir (cuanto van a ahorrar y a invertir) y cual va a ser su oferta de trabajo, tomando como dados los precios del factor productivo capital y el factor productivo trabajo. Por su parte, las empresas deciden qué cantidad de factores productivos van a contratar, dados unos precios de los mismos. Estas cantidades van a determinar la producción de la economía. El equilibrio del modelo viene dado por aquella situación en la cual las decisiones de los consumidores en términos

de la maximización de su función de utilidad son compatibles con las decisiones de las empresas en términos de la maximización de beneficios, cumpliéndose la restricción presupuestaria global de la economía.

La estructura de este tema es la siguiente. En la sección 2 vamos a estudiar las decisiones de los consumidores, cuyo comportamiento viene determinado por la maximización de su función de utilidad. Esta función de utilidad depende por un lado del consumo y por otro del ocio, que lo definimos como el tiempo discrecional disponible excepto las horas dedicadas a trabajar. A partir de la maximización de esta función objetivo obtenemos el comportamiento de los consumidores, en términos de consumo-ahorro y de oferta de trabajo-tiempo de ocio. Estas decisiones se toman dados unos precios relativos para los factores productivos. La sección tercera presenta el comportamiento de las empresas. En nuestro caso suponemos que las empresas actúan en un entorno competitivo, y que por tanto son idénticas. Así, todas las empresas tienen la misma tecnología, por lo que de nuevo vamos a usar el concepto de agente representativo, es decir, analizamos el comportamiento de una empresa representativa. El objetivo de esta empresa representativa es el de maximizar beneficios. Para ello va a decidir contratar una determinada cantidad de factores productivos que va a alquilar a los consumidores, que son los propietarios de los mismos.

El modelo lo vamos a resolver en dos contextos: un entorno competitivo y bajo la figura del planificador centralizado o dictador benevolente. En el primer caso, cada agente toma sus decisiones de forma individual tomando como dados los precios de los factores productivos. En el caso de una economía centralizada, hay un único agente, el dictador benevolente, en el cual no existen los precios y determina las distintas variables de la economía en función de la maximización de la función objetivo de consumidores y empresas.

Una vez presentado el modelo básico a continuación vamos a introducir el papel del gobierno a través de los impuestos. El objetivo que perseguimos es mostrar que la introducción de impuestos que tienen efectos distorsionadores sobre las decisiones de los individuos provocan una desviación respecto a la asignación de equilibrio de mercado. En este caso, vamos a obtener como resultado que el equilibrio resultante en el caso de una economía planificada es superior al correspondiente a una economía de mercado.

Finalmente, vamos a presentar una serie de elementos que pueden incluirse en la estructura básica del modelo de equilibrio general. Se trata de un vasto conjunto de elementos que intentan recoger distintos aspectos que observamos respecto al funcionamiento de la economía real. Todos estos elementos complican la resolución del modelo, pero también pueden hacerlo más realista a la hora de explicar el comportamiento de una economía. Por otra parte, también se han ido incorporando elementos que suponen la existencia de rigideces en precios y salarios, así como un entorno de competencia monopolística, constituyendo un modelo relativamente más complejo que se ha venido en llamar el Modelo Nuevo Keynesiano.

6.2 Los consumidores

El primer agente económico que vamos a analizar son los consumidores o las familias. Para analizar los diferentes agentes económicos vamos a usar el concepto de agente representativo. Esto es, vamos a suponer que todos los agentes son idénticos en preferencias y tecnologías. Esto hace que podamos analizar el comportamiento de uno de ellos y luego agregar. Además, tenemos que realizar una serie de supuestos sobre como son dichas preferencias.

El siguiente supuesto que hacemos es que agente representativo es optimizador, es decir, maximiza una determinada función objetivo. En el caso de los consumidores la función objetivo es la utilidad o función de felicidad instantánea. En términos generales podemos pensar que la función de utilidad de un individuo está compuesta por tres elementos: con el consumo de bienes y servicios, las tenencias de saldos reales y el ocio. En nuestro caso no vamos a considerar el papel del dinero.

Para analizar el comportamiento de los consumidores vamos a introducir otra serie de supuestos. En primer lugar, vamos a considerar que los mercados de capitales son perfectos. Esto significa que los individuos pueden mover dinero del futuro al presente a un coste dado por el tipo de interés, y que no existe ninguna restricción a este movimiento. Este supuesto es fundamental para que el individuo separe sus decisiones de consumo de su renta periodo a periodo. Por otra parte, también suponemos que la función de utilidad es aditivamente separable en el tiempo. Esto significa que la utilidad

de un periodo únicamente se ve afectada por el consumo de dicho periodo, pero no depende de los consumos de periodos anteriores. Por último, también vamos a suponer que la función de utilidad es aditivamente separable entre consumo y ocio. Así, la utilidad marginal del consumo no se ve afectada por la cantidad de ocio, ni la utilidad marginal del ocio depende de la cantidad de consumo.

Por tanto, en el análisis que llevamos a cabo a continuación la utilidad o felicidad del individuo va a depender de dos elementos: Consumo, C , y Ocio, O . El consumo hace referencia a la cantidad de bienes y servicios que consume un individuo mientras que el ocio es la parte del tiempo disponible por el individuo que no dedica a trabajar.¹ Este agente lo podemos definir como consumidor o como familia. Suponemos que la vida de este agente económico va a ser infinita.

El problema de maximización intertemporal del individuo vendría dado por:

$$\max_{(C_t, O_t)} \mathcal{L} = E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, O_t) \quad (6.1)$$

donde β es el factor de descuento intertemporal, definido anteriormente. $E_t(\cdot)$ es la esperanza matemática sobre las variables futuras. Dado que vamos a considerar un contexto sin incertidumbre, dicha esperanza matemática desaparece, dado que el valor de todas las variables en el futuro es conocido en el momento actual.

Los consumidores maximizan la suma ponderada de sus utilidades sujetas a la restricción presupuestaria. La restricción presupuestaria nos va a indicar tanto los usos como los recursos disponibles. Los recursos disponibles por parte de los consumidores provienen del alquiler a las empresas de sus dotaciones de factores productivos. Esto significa que suponemos que los consumidores son los propietarios de los factores productivos de la economía. Estos factores productivos son por un lado el tiempo, a partir del cual va

¹ Alternativamente, podemos suponer que los individuos consumen un único bien que está compuesto por un continuo de bienes diferenciados tal que:

$$C_t = \left[\int_0^1 C_{j,t}^{(\xi-1)/\xi} dj \right]^{\xi/(\xi-1)}$$

donde j indica el bien y la elasticidad de sustitución entre los bienes diferenciados viene dada por $\xi > 1$.

a determinarse la cantidad de trabajo. El segundo factor productivo es el capital, que se genera a través del proceso de ahorro, esto es, la parte de la producción no consumida. Dado el precio de los factores productivos, los consumidores van a decidir qué cantidad de factores productivos (cuanto capital y cuanto trabajo) van a alquilar a las empresas.

Por otra parte, también hemos de suponer que los consumidores son los propietarios de las empresas. Dado que suponemos la existencia de un entorno competitivo con una tecnología que presenta rendimientos constantes a escala, los beneficios de la empresa representativa son nulos. En un entorno no competitivo, si la empresa representativa obtiene beneficios extraordinarios, entonces tendríamos que incluir dicha cantidad en la restricción presupuestaria del consumidor, si bien esto no afectaría a las decisiones del consumidor. Vamos a suponer que la función de utilidad del individuo tiene la siguiente forma:

$$U(C_t, O_t) = \gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t) \quad (6.2)$$

donde L_t es el tiempo de trabajo y γ representa la proporción del consumo sobre la renta total. La dotación total de tiempo disponible por parte del individuo la hemos normalizado a 1. Esto significa que L_t representa la fracción de tiempo que el individuo dedica a trabajar, siendo el ocio por tanto $1 - L_t$.

El problema a maximizar vendría dado por:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.3)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t \quad (6.4)$$

donde I_t es la inversión, W_t es el salario real, K_t es el stock de capital y R_t es el tipo de interés, esto es, el coste de uso del capital que también es un precio relativo en términos de unidades de consumo. La renta salarial del individuo vendría dada por $W_t L_t$, es decir, el salario multiplicado por la fracción de tiempo que dedica a trabajar. Esto significa que el coste del ocio es $W_t(1 - L_t)$. Por su parte, la rentas procedentes del capital vendrían dadas por $R_t K_t$.

Ahora necesitamos una ecuación adicional, que nos indique como es el proceso de acumulación del capital a lo largo del tiempo. Este proceso lo vamos a definir a través de una ecuación de inventario:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \quad (6.5)$$

donde $\delta > 0$ es la tasa de depreciación física del capital que suponemos positiva, es decir, parte de la inversión bruta que se realiza en un periodo tiene como objetivo la reposición del capital que se deprecia periodo a periodo.

En la realidad el capital está compuesto por una gran variedad de diferentes tipos de capital, que tienen características diferentes y que, por tanto, presentan diferentes tasas de depreciación. Así, encontramos activos de capital que presentan tasas de depreciación muy bajas, como son los edificios. Sin embargo, existen otros tipos de capital con tasas de depreciación muy elevadas, como los programas informáticos o los ordenadores. Esto hace que sea difícil trabajar con esta variable e incluso obtener estimaciones más o menos fiables de la misma. Los diferentes activos de capital tienen características muy diferentes unos de otros, por lo que resulta relativamente complejo su agregación en una única variable.

Otro supuesto adicional que estamos realizando es que podemos convertir las unidades producidas y no consumidas en inversión de la economía y, por tanto, en capital físico. Esto hace que todas las variables del modelo vengan definidas en términos de unidades de consumo.

La expresión (6.5) implica que la inversión puede definirse como:

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta) K_t \quad (6.6)$$

por lo que la restricción presupuestaria del individuo sería:

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = W_t L_t + R_t K_t \quad (6.7)$$

o equivalentemente:

$$C_t + K_{t+1} = W_t L_t + (R_t + 1 - \delta) K_t \quad (6.8)$$

El problema del consumidor podemos resolverlo, por ejemplo, a través del lagrangiano dinámico:

$$\max_{(C_t, K_t, L_t)} \mathcal{L} = \beta^t \left\{ \begin{array}{l} \gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t) \\ -\lambda_t [C_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta)K_t] \end{array} \right\}$$

que nos indicaría la senda óptima del consumo que maximiza el nivel de bienestar del individuo a lo largo de su vida, así como la oferta de trabajo del individuo. Para ello los agentes toman como dado los precios relativos de los factores productivos, esto es, el salario y el tipo de interés real.

A la hora de maximizar el anterior problema hemos de tener en cuenta que la restricción presupuestaria vendría definida para cada periodo y, por tanto, la restricción a la que se enfrenta el consumidor sería

$$\begin{aligned} & \dots - \beta^t \lambda_t [C_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta)K_t] \\ & - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} [C_{t-1} + K_t - W_{t-1} L_{t-1} - (R_{t-1} + 1 - \delta)K_{t-1}] - \dots \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden vendrían dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \beta^t \left[\frac{\gamma}{C_t} - \lambda_t \right] = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = \beta^t \left[\frac{1 - \gamma}{1 - L_t} - \lambda_t W_t \right] = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = \beta^t \lambda_t [R_t + 1 - \delta] - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad (6.11)$$

Para obtener las decisiones del individuo tenemos que calcular el valor del parámetro de Lagrange, que representa el precio sombra del consumo, esto es, en cuanto valora el individuo la última unidad consumida en cada periodo. Para ello, despejamos de la primera condición de primer orden (6.9) y sustituimos en la segunda condición de primer orden (6.10). Esto da lugar a una condición que iguala el ratio de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad adicional de ocio:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1 - L_t} = W_t \quad (6.12)$$

Para comprender mejor su significado, la condición de equilibrio (6.13) podemos reescribirla como:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma}C_t = W_t(1-L_t) \quad (6.13)$$

es decir el consumo va a ser una proporción de la valoración del ocio en unidades de consumo. Como podemos observar, para convertir el tiempo de ocio en unidades de consumo multiplicamos éste por el salario. Así, el consumidor valoraría cuanto le reporta en términos de satisfacción una unidad de tiempo si la dedica al ocio respecto a cuanto le reportaría dicha unidad de tiempo si la dedica a trabajo, que es valorada en términos del consumo.

Por otra parte, en la tercera condición de primer orden (6.10) aparece tanto el parámetro de Lagrange en el periodo t , como en el periodo $t-1$. Como de la primera condición de primer orden hemos obtenido que $\lambda_t = \gamma/C_t$, esto supone que $\lambda_{t-1} = \gamma/C_{t-1}$. Sustituyendo obtenemos la condición que iguala el ratio marginal del consumo con el de la inversión:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [R_t + 1 - \delta] \quad (6.14)$$

Esta ecuación es conocida como la regla Keynes-Ramsey que nos indica la senda óptima de consumo del individuo o también es conocida como la ecuación de Lucas, que indica como son las decisiones de inversión y de acumulación de capital en la economía.

6.3 Las empresas

El otro agente económico que consideramos son las empresas, que representan al sector productivo de la economía. Las empresas constituyen el agente económico que se dedica a producir los bienes y servicios que luego van a consumir los individuos o bien que estos van a ahorrar y a transformar en capital. Para ello alquilan los factores productivos a los individuos, que son los propietarios de los mismos. Estos factores productivos son, por un lado el capital y por otro, el trabajo. El precio de estos factores productivos viene determinado por la tecnología.

Suponemos que las empresas maximizan beneficios, sujetas a la restricción tecnológica. Como estamos en un entorno competitivo esto significa que los beneficios de las empresas van a ser cero. Es decir, los factores van a ser retribuidos en función de su aportación

al proceso productivo. Esto significa que todos los ingresos que se deriven del uso de los factores productivos son iguales a su retribución.

Los otros supuestos que hacemos en el caso de este agente son en relación a la forma de la función de producción. Suponemos que existen rendimientos constantes a escala, por lo que si la cantidad de factores aumenta en una proporción, la producción aumenta en dicha proporción. Esto significa que existen rendimientos decrecientes respecto al factor productivo capital y respecto al factor productivo trabajo.

Todos estos supuestos hacen que el papel de las empresas en este tipo de modelos sea relativamente limitado, al menos en sus versiones básicas. Así, las empresas únicamente deciden la cantidad de factores productivos que van a contratar, tomando como dados los precios de los mismos y, dada la tecnología existente, obtienen un determinado nivel de producción.

Problema de optimización en la que se determina un vector de factores productivos, dados unos precios de los mismos, y a través de la función tecnológica, el nivel de producción. La función de producción agregada (la tecnología) suponemos que tiene la siguiente forma:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t) \quad (6.15)$$

donde Y_t es el nivel de producción agregada de la economía.² Al igual que la función de utilidad del consumidor, esta función $F(K_t, L_t)$ tiene que cumplir las mismas propiedades: estrictamente creciente, estrictamente cóncava respecto a cada factor y dos veces diferenciable. Suponemos que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala. Es decir, si aumentamos al doble la cantidad de factores productivos la producción de la economía

² Alternativamente, podemos suponer que existe un continuo de empresas produciendo en un entorno de competencia monopolística, cada una de ellas produciendo un bien diferenciado, tal que el nivel de producción agregado de la economía puede definirse como:

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_{j,t}^{(\xi-1)/\xi} dj \right]^{\xi/(\xi-1)}$$

donde j indica el bien y la elasticidad de sustitución entre los bienes diferenciados viene dada por $\xi > 1$. La misma expresión para la agregación tendríamos en el caso del stock de capital y del empleo.

aumenta al también al doble. Esto significa que la función de producción es lineal respecto a los factores productivos.

A_t es una variable que representa el estado de la tecnología y que se denomina Productividad Total de los Factores (PTF). La Productividad Total de los Factores es en principio una variable no observable, pero que puede ser calculada como un residuo.³ La PTF la podemos interpretar como el nivel de conocimientos general sobre las artes productivas de que dispone una economía, es decir, estaría reflejando un concepto muy amplio de tecnología. En términos económicos estaría reflejando la productividad agregada de la economía en el uso de todos sus factores productivos. Es decir, sería el nivel de eficiencia productiva agregada.

El problema que resuelven las empresas consiste en la maximización de beneficios, tal que:

$$\max \Pi_t = P_t Y_t - W_t L_t - R_t K_t \quad (6.16)$$

sujeto a la restricción tecnológica dada por:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t) \quad (6.17)$$

Si suponemos rendimientos constantes a escala y mercados competitivos entonces resulta que los beneficios óptimos son cero, $\Pi_t = 0$. Como podemos comprobar, el problema para la maximización de beneficios de la empresa es estático, si bien las empresas toman sus decisiones en un contexto dinámico. De hecho, si resolvemos el problema de maximización de beneficios en un contexto dinámico, el resultado que obtenemos es exactamente el mismo, dados los supuestos que estamos haciendo, principalmente el hecho de que las empresas alquilan periodo a periodo tanto el factor productivo trabajo como el factor productivo capital.

Las condiciones de primer orden del problema anterior son:

³El concepto económico de Productividad Total de los Factores es similar al concepto que representa la constante cosmológica en la Teoría de la Relatividad de Einstein. Aunque no existe la certeza de que dicha constante exista, está representando a alguna fuerza por ahora desconocida, que resulta necesaria para explicar el comportamiento del Universo. Sin dicha constante, la Teoría de la Relatividad no funcionaría. Algo parecido sucede con la PTF, de la cual no existe una teoría sobre la misma ni sobre cuales son sus factores determinantes, pero que es un componente imprescindible para explicar el nivel de producción de una economía, como un elemento adicional a la dotación de factores productivos.

$$P_t A_t F_K(K_t, L_t) - R_t = 0 \quad (6.18)$$

$$P_t A_t F_L(K_t, L_t) - W_t = 0 \quad (6.19)$$

que indican que el valor de la productividad marginal de cada factor productivo tiene que ser igual a su coste. Como podemos observar, el precio relativo de los factores es igual a su productividad marginal, tal que obtenemos:

$$A_t F_K(K_t, L_t) = \frac{R_t}{P_t} \quad (6.20)$$

$$A_t F_L(K_t, L_t) = \frac{W_t}{P_t} \quad (6.21)$$

El precio del bien final lo normalizamos a 1 ($P_t = 1$), tal que todas las variables están medidas en términos de unidades de consumo. De este modo los únicos precios que aparecen en el modelo son los correspondientes a los factores productivos, estando todas las variables definidas en términos reales. De este modo el salario sería un salario real y el tipo de interés sería un tipo de interés real.

Al igual que hemos parametrizado la función de utilidad de los consumidores, también vamos a parametrizar la función de tecnología. En concreto vamos a suponer que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas:

$$F(K_t, L_t) = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.22)$$

donde α es la elasticidad del nivel de producción respecto al capital. Esta función de producción es la más utilizada en la práctica, y supone una situación intermedia entre una tecnología de Leontief, en la cual no es posible sustituir un factor productivo por otro, y una tecnología con perfecta sustituibilidad de los factores productivos.

Por tanto, los beneficios de la empresa vendrían dados por:

$$\max \Pi_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - W_t L_t - R_t K_t \quad (6.23)$$

Calculando las condiciones de primer orden respecto al capital y al trabajo obtendríamos:

$$\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - R_t = 0 \quad (6.24)$$

$$(1 - \alpha)A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - W_t = 0 \quad (6.25)$$

O escrito de otro modo:

$$R_t = \frac{\alpha A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t} \quad (6.26)$$

$$W_t = \frac{(1 - \alpha)A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t} \quad (6.27)$$

por lo que las rentas del trabajo serían una proporción $1 - \alpha$ de la renta total y las rentas del capital serían una proporción α de la renta total.

6.4 Equilibrio del modelo

Una vez descrito el comportamiento de cada agente, vamos a estudiar la interacción entre ambos para determinar el equilibrio macroeconómico. Esto significa que vamos a poner ahora los dos agentes descritos anteriormente de forma conjunta. Los consumidores deciden cuanto van a consumir, C_t , cuanto van a invertir, I_t y cuanto van a trabajar, L_t , con el objetivo de maximizar su nivel de felicidad, tomando como dados los precios de los factores productivos. Por otra parte, las empresas van a producir una determinada cantidad de bienes, Y_t , que viene dada en función de su decisión sobre cuanto capital, K_t y trabajo L_t , van a contratar dados los precios de los factores productivos.

Por tanto, el equilibrio del modelo está compuesto por los siguientes tres bloques de componentes:

- i) Un sistema de precios para W y R .
- ii) Una asignación de valores para Y , C , L y K .
- iii) Una restricción de factibilidad, que nos indica las asignaciones posibles:

$$Y_t = C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t \quad (6.28)$$

Como podemos observar, la definición de equilibrio que estamos utilizando implica que todos los mercados de la economía están en equilibrio. Así, tanto el mercado de trabajo como el mercado de

capitales, como el mercado de bienes están en equilibrio. Es a esto a lo que denominamos equilibrio general.

Definición de Equilibrio: Un equilibrio competitivo para nuestra economía es una secuencia de consumo, ocio e inversión por parte de los consumidores $\{C_t, 1 - L_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}$ y una secuencia de capital y de horas de trabajo utilizadas por parte de las empresas $\{K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}$, tal que dada una secuencia de precios $\{W_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$:

- i) El problema de optimización de los consumidores se satisface.
- ii) Se cumplen las condiciones de primer orden para las empresas.
- iii) La restricción de factibilidad de la economía se cumple.

Tal y como hemos definido nuestro modelo anteriormente, la solución al mismo es óptimo de Pareto garantizando que el bienestar social es máximo. Cualquier desviación de este equilibrio implica pérdidas de bienestar para alguno de los agentes del modelo. De este modo, la especificación teórica anterior cumple los Teoremas del Bienestar.

Teoremas del Bienestar: Si no existen distorsiones tales como impuestos (distorsionadores) o externalidades:

Primer Teorema del Bienestar: Todo equilibrio competitivo es un óptimo de Pareto.

Segundo Teorema del Bienestar: Para cada óptimo de Pareto existe un sistema de precios que lo hace un Equilibrio Competitivo.

Podemos resolver el modelo de dos formas: En primer lugar, podemos suponer que cada agente toma sus decisiones para maximizar su función objetivo, en un entorno competitivo. Esto es lo que se denomina el problema Descentralizado o el problema competitivo. Este caso sería la representación de una economía de mercado, donde las decisiones de los agentes se toman en función de los precios relativos. La otra opción consiste en la maximización conjunta del bienestar de la sociedad. A esto es lo que se denomina problema del Planificador Central o Dictador Benevolente (sin precios en la restricción presupuestaria).

En el modelo que hemos desarrollado ambas soluciones son la misma, dado que no existe ningún tipo de distorsión y, por tanto, las decisiones de los agentes individuales son tales que también

garantizan la maximización de la función de bienestar social. Con distorsiones, la solución del Planificador Central genera un mayor nivel de bienestar que el Problema Descentralizado, ya que incorpora las distintas externalidades o fallos de mercado, mientras que la solución competitiva sería ineficiente.

6.4.1 Equilibrio del modelo (*Equilibrio competitivo*)

En primer lugar vamos a considerar la existencia de un entorno competitivo o descentralizado, donde cada agente toma sus propias decisiones para maximizar sus respectivas funciones objetivo. El problema descentralizado vendría dado por la maximización del siguiente problema:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.29)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t \quad (6.30)$$

donde la inversión viene definida por:

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

En este caso los consumidores eligen, dado el precio de los factores productivos, cuanto van a consumir (y al mismo tiempo cuanto van a ahorrar que va a determinar el proceso de acumulación del capital) así como cuanto tiempo van a dedicar a trabajar. Es decir, existe un vector de precios que van a constituir la información fundamental que van a utilizar los individuos para tomar sus decisiones.

Para resolver dicho problema construimos el Lagrangiano:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\begin{array}{l} [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \\ -\lambda_t [C_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta)K_t] \end{array} \right) \quad (6.31)$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -\frac{1-\gamma}{1-L_t} + \lambda_t W_t = 0 \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \beta^t \lambda_t (R_t + 1 - \delta) - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - (R_t + 1 - \delta)K_t - W_t L_t = 0 \quad (6.35)$$

Sustituyendo la condición de primer orden (6.32) en la condición de primer orden (6.33), obtenemos la condición que iguala el ratio de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad adicional de ocio:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = W_t \quad (6.36)$$

Sustituyendo la condición de primer orden (6.32) en la condición de primer orden (6.34), obtenemos la condición que iguala el ratio marginal del consumo con el de la inversión:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [R_t + 1 - \delta] \quad (6.37)$$

Por otra parte, del problema de maximización de la empresa sabemos que R y W son iguales a sus productos marginales:

$$R_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \quad (6.38)$$

$$W_t = (1-\alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.39)$$

Sustituyendo en las condiciones de equilibrio del consumidor obtenemos:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.40)$$

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] \quad (6.41)$$

Por otra parte, sustituyendo el precio relativo de los factores productivos en la restricción presupuestaria del individuo obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - K_t - (R_t - \delta)K_t - W_t L_t = 0 \quad (6.42)$$

De nuevo, sustituyendo el precio de los factores productivos capital y trabajo resulta:

$$C_t + K_{t+1} - K_t - (\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - \delta) K_t - (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} L_t = 0$$

$$C_t + K_{t+1} - K_t - \alpha A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + \delta K_t - A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} + \alpha A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = 0$$

y operando llegamos finalmente a:

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t - A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = 0 \quad (6.43)$$

expresión que nos indica el proceso de acumulación de capital a lo largo del tiempo, en la que el capital en el próximo periodo es igual a lo que se produce hoy, menos lo que se consume, más el capital de hoy menos su depreciación..

Por tanto, la solución competitiva viene determinada por dos ecuaciones en diferencias:

$$C_t = \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] C_{t-1} \quad (6.44)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - C_t \quad (6.45)$$

más una ecuación estática que nos relaciona la oferta de trabajo con el salario real:

$$\frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1 - L_t} = (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.46)$$

De hecho, nuestro modelo podemos reducirlo a un sistema de dos ecuaciones, una estática a partir de la cual obtendríamos el nivel de empleo de la economía y otra ecuación de segundo grado la cual nos daría el stock de capital de la economía, y que obtendríamos sustituyendo la ecuación dinámica del consumo en la ecuación dinámica del capital. En este caso resultaría que:

$$C_t = K_{t+1} - (1 - \delta) K_t - A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.47)$$

y sustituyendo en la expresión (6.43) resulta:

$$\begin{aligned}
& K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \\
= & \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] K_t - (1 - \delta)K_{t-1} - A_{t-1} K_{t-1}^\alpha L_{t-1}^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

El equilibrio competitivo consiste en encontrar secuencias de las variables $\{C_t, I_t, K_t, L_t, R_t, W_t, Y_t\}_{t=0}^\infty$ tal que sean satisfechas las condiciones que definen el equilibrio. En resumen, el modelo de nuestra economía estaría compuesto por las siguientes siete ecuaciones:

$$\frac{(1 - \gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{1 - L_t} = W_t \quad (6.48)$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta [R_{t+1} + 1 - \delta] \quad (6.49)$$

$$R_t = \frac{\alpha A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t} \quad (6.50)$$

$$W_t = \frac{(1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t} \quad (6.51)$$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.52)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (6.53)$$

$$C_t + I_t = Y_t \quad (6.54)$$

6.4.2 Equilibrio del modelo (*Dictador benevolente*)

En esta sección vamos a resolver el problema anterior, pero suponiendo la existencia de una economía de planificación centralizada. Para ello suponemos la existencia de un agente, que denominamos el dictador benevolente, que decide la maximización conjunta de todos los agentes de la economía. Es decir, existe un agente que va a elegir las sendas de consumo, inversión y trabajo, tal que las empresas maximicen beneficios y los consumidores maximicen su nivel de felicidad. En esta economía no hay papel para los precios. Es decir, los factores productivos no tendrían una remuneración, ya que es el dictador benevolente el que decide las cantidades y

los recursos disponibles por parte de la economía serían igual a la producción de forma directa.

El problema del planificar centralizado consistiría en maximizar su función de utilidad:

$$\max_{(C_t, I_t, L_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.55)$$

sujeto a:

$$C_t + I_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.56)$$

Como podemos comprobar, ahora la restricción presupuestaria de los consumidores viene dada por un lado por los gastos que siguen siendo los mismos, consumo y ahorro o inversión, pero por el lado de los ingresos viene determinada por la producción agregada de la economía. Los precios de los factores productivos no juegan ahora ningún papel ya que no se retribuye como tal a cada uno de ellos, sino que lo que se produce en la economía conforman los ingresos que reciben los agentes para ser o bien consumidos o bien ahorrados.

El lagrangiano correspondiente a este problema sería:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left([\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] - \lambda_t [C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}] \right) \quad (6.57)$$

Las condiciones de primer orden vendrían dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = -\frac{1 - \gamma}{1 - L_t} + \lambda_t (1 - \alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \beta^t \lambda_t (\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta) - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t - A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = 0 \quad (6.61)$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.62)$$

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] \quad (6.63)$$

Es decir, la solución a este problema resulta en dos ecuaciones en diferencias:

$$C_t = \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] C_{t-1} \quad (6.64)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - C_t \quad (6.65)$$

más una ecuación estática que nos relaciona la oferta de trabajo con el salario real:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.66)$$

Vemos como la solución bajo un entorno de economía planificada es exactamente el mismo que bajo un entorno competitivo. Esto es así porque no existe ningún tipo de distorsión sobre la economía que altere las decisiones de los agentes respecto a la situación eficiente. La única diferencia que podemos apreciar es que mientras en la economía descentralizada existe un mercado de factores productivos donde se determina el precio de éstos, en una economía centralizada no existen estos mercados de factores

Por tanto ahora la solución del problema consiste en encontrar $\{C_t, I_t, K_t, L_t, Y_t\}_{t=0}^{\infty}$, tal que se cumplan las condiciones que definen el equilibrio. La estructura de la economía viene por tanto definida por el siguiente sistema de cinco ecuaciones:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha)A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.67)$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] \quad (6.68)$$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.69)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \quad (6.70)$$

$$C_t + I_t = Y_t \quad (6.71)$$

6.4.3 El estado estacionario

Una vez obtenido el equilibrio de la economía, a continuación podemos definir los valores de estado estacionario de nuestra economía. En efecto el modelo presentado anteriormente es estacionario, en el sentido de que existe un valor para las variables que se mantiene constante en el tiempo. Para calcular el estado estacionario, en primer lugar, eliminamos los subíndices de tiempo de las variables. Así, la definición de estado estacionario nos indica una situación en la cual las variables se mantienen constantes periodo a periodo. Esto significa, por ejemplo, que tendríamos $\dots = C_{t-1} = C_t = C_{t+1} = \dots = \bar{C}$. Por tanto, el modelo podemos definirlo como:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{\bar{C}}{1-\bar{L}} = (1-\alpha)\bar{A}\bar{K}^\alpha\bar{L}^{1-\alpha} \quad (6.72)$$

$$1 = \beta [\bar{R} + 1 - \delta] \quad (6.73)$$

$$\bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^\alpha\bar{L}^{1-\alpha} \quad (6.74)$$

$$\bar{I} = \delta\bar{K} \quad (6.75)$$

$$\bar{C} + \bar{I} = \bar{Y} \quad (6.76)$$

De la ecuación (6.73) obtenemos directamente que el tipo de interés real de equilibrio viene dado por:

$$\bar{R} = \frac{1}{\beta} + \delta - 1 \quad (6.77)$$

expresión que tiene una interpretación interesante ya que esto significa que en equilibrio el tipo de interés real de una economía va a depender del factor de descuento, esto es, de una característica de los individuos que conforman dicha economía.

Lo primero que hacemos es poner todas las variables en función del nivel de producción de equilibrio. La expresión (6.73) la podemos escribir como:

$$1 = \beta \left[\alpha \frac{\bar{Y}}{\bar{K}} + 1 - \delta \right]$$

Resolviendo para $\bar{K}$ resulta:

$$\bar{K} = \frac{\alpha\beta}{1 - \beta + \beta\delta} \bar{Y} \quad (6.78)$$

En segundo lugar, usando (6.75) y dada (6.78) la inversión en equilibrio vendría dada por:

$$\bar{I} = \frac{\alpha\beta\delta}{1 - \beta + \beta\delta} \bar{Y} \quad (6.79)$$

En tercer lugar, usando las expresiones (6.76) y (6.79) obtenemos que el consumo en equilibrio sería:

$$\bar{C} = \frac{1 - \beta + (1 - \alpha)\beta\delta}{1 - \beta + \beta\delta} \bar{Y} \quad (6.80)$$

A continuación, usando la expresión (6.72) obtenemos que:

$$\bar{L} = \frac{\gamma(1 - \alpha)(1 - \beta + \beta\delta)}{(1 - \gamma)(1 - \beta + (1 - \alpha)\beta\delta) + \gamma(1 - \alpha)(1 - \beta + \beta\delta)} \quad (6.81)$$

Finalmente, sustituyendo (6.78) y (6.81) en (6.74) llegamos al valor de equilibrio para el nivel de producción de la economía:

$$\bar{Y} = \bar{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha\beta}{1 - \beta + \beta\delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (6.82)$$

$$\left[1 + \frac{\gamma(1 - \alpha)(1 - \beta + \beta\delta)}{(1 - \gamma)(1 - \beta + (1 - \alpha)\beta\delta)} \right] \quad (6.83)$$

Una vez obtenido el estado estacionario de la economía, ya podemos proceder a transformar en estacionarias las variables de la economía y calcular la desviación de cada una de ellas respecto a su estado estacionario.

6.5 El modelo con impuestos

El modelo desarrollado anteriormente únicamente considera el comportamiento de dos agentes económicos: los consumidores por

un lado y las empresas por el otro, excluyendo al sector público. Esta exclusión del gobierno hacía que la solución competitiva fuese exactamente igual a la solución del planificador centralizado. Esto se debe a que en dicho contexto no existe ninguna distorsión en la economía que de lugar a asignaciones no eficientes. Sin embargo, ahora vamos a considerar la existencia de un sector público, que nos va a llevar a resultados diferentes.

A continuación vamos a resolver el modelo anterior pero considerando la existencia de impuestos. Vamos a suponer que el gobierno recauda una cantidad de recursos vía impuestos y que los devuelve a los consumidores vía transferencias. Si suponemos que el impuesto es de cuantía fija, en este caso la solución competitiva seguiría siendo exactamente la misma que la solución centralizada. Sin embargo, si introducimos impuestos sobre la renta de los factores productivos o impuestos sobre el consumo vamos a observar que la solución competitiva es diferente de la correspondiente a un entorno centralizado. Consideramos la existencia de tres tipos impositivos: Impuesto sobre el consumo (τ_t^c), impuesto sobre las rentas salariales (τ_t^l) e impuesto sobre las rentas del capital (τ_t^k).

Los consumidores

Vamos a suponer que la función de utilidad instantánea es igual a la utilizada anteriormente:

$$U(C_t, 1 - L_t) = \gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(1 - L_t) \quad (6.84)$$

donde C_t representa al consumo privado en bienes y servicios en el momento t . El ocio se define como $1 - L_t$, es decir, la dotación inicial de tiempo discrecional, que hemos normalizado a 1, menos las horas dedicadas a trabajar, L_t . El parámetro γ ($0 < \gamma < 1$) nos indica la proporción del consumo sobre el ingreso total.

En este caso la restricción presupuestaria del individuo sería:

$$(1 + \tau_t^c)C_t + I_t = (1 - \tau_t^l)W_tL_t + (1 - \tau_t^k)R_tK_t + G_t \quad (6.85)$$

El stock de capital se mueve de acuerdo con:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \quad (6.86)$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital y donde I_t es la inversión bruta.

El problema al que se enfrentan las familias consiste en maximizar el valor de su utilidad:

$$\max_{(C_t, K_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.87)$$

sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal del consumidor representativo, que teniendo en cuenta los impuestos y sustituyendo:

$$(1 + \tau_t^c)C_t + K_{t+1} - K_t = (1 - \tau_t^l)W_t L_t + (1 - \tau_t^k)(R_t - \delta)K_t + G_t \quad (6.88)$$

dado K_0 , el stock de capital privado inicial y donde $\beta \in (0, 1)$, es el factor de descuento de los consumidores, K_t es el stock de capital, W_t es el precio relativo del factor trabajo (el salario real) y R_t es el precio relativo del factor capital (el tipo de interés real) y G_t son las transferencias que recibe el consumidor del gobierno. Nótese que el tipo impositivo sobre las rentas del capital no aplica directamente a la rentabilidad bruta del capital sino a la rentabilidad del capital neta de la depreciación del mismo.

Las condiciones de primer orden del problema de las familias vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C} = \beta^t \left[\frac{\gamma}{(1 + \tau_t^c)C_t} - \lambda_t \right] = 0 \quad (6.89)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \beta^t \left[-(1 - \gamma) \frac{1}{1 - L_t} + \lambda_t (1 - \tau_t^l) W_t \right] = 0 \quad (6.90)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \beta^t \lambda_t \left[(1 - \tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] - \lambda_{t-1} \beta^{t-1} = 0 \quad (6.91)$$

donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asignado a la restricción presupuestaria en el momento t . Despejando el parámetro de Lagrange, obtenemos:

$$\lambda_t = \frac{\gamma}{(1 + \tau_t^c)C_t} \quad (6.92)$$

Combinando las ecuaciones (6.89) y (6.90) obtenemos la condición que iguala la desutilidad marginal de una hora adicional de trabajo con la utilidad marginal de los ingresos derivados de dicha hora trabajada:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = \frac{(1-\tau_t^l)}{(1+\tau_t^c)} W_t \quad (6.93)$$

Combinando la ecuación (6.89) con la ecuación (6.91) obtenemos la condición de primer orden intertemporal,

$$\frac{(1+\tau_t^c)C_t}{(1+\tau_{t-1}^c)C_{t-1}} = \beta \left[(1-\tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] \quad (6.94)$$

que nos indica cual es la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo. Por tanto, la solución del problema de elección del consumidor se resuelve en términos de una ecuación estática que determina el número de horas trabajadas por el individuo (la oferta de trabajo) y una ecuación dinámica que nos dice como es la senda de consumo o, equivalentemente, como son las decisiones de ahorro/inversión del individuo.

Como podemos observar la oferta de trabajo se ve afectada netativamente tanto por el impuesto sobre el consumo como por el tipo impositivo sobre las rentas que genera este factor. Así, cuanto mayor sea el tipo impositivo sobre la renta del trabajo, menor es el ingreso salarial que recibe el individuo y, por tanto, menor será su oferta de trabajo.

Por su parte la ecuación que determina la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo depende de los impuestos sobre el capital y de las variaciones del impuesto sobre el consumo. Este resultado se debe a que esta ecuación lo que está determinando es el volumen de ahorro del individuo, que es gravado por el impuesto sobre las rentas del capital.

Las empresas

El problema que resuelven las empresas no se ve alterado en este caso, consistiendo en maximización de beneficios

$$\max \Pi_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - W_t L_t - R_t K_t \quad (6.95)$$

Calculando las condiciones de primer orden respecto al capital y al trabajo obtendríamos:

$$\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - R_t = 0 \quad (6.96)$$

$$(1-\alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} - W_t = 0 \quad (6.97)$$

El gobierno

Suponemos que periodo a periodo se cumple la restricción presupuestaria del gobierno. Por tanto, las transferencias que reciben los consumidores son iguales periodo a periodo los ingresos impositivos:

$$G_t = \tau_t^c C_t + \tau_t^l W_t L_t + \tau_t^k (R_t - \delta) K_t \quad (6.98)$$

El equilibrio competitivo

Al igual que lo hemos definido anteriormente, el equilibrio competitivo consiste en encontrar $\{C_t, I_t, K_t, L_t, R_t, W_t, Y_t, G_t\}_{t=0}^\infty$ tal que cumplan las condiciones que definen el equilibrio. El modelo está compuesto por las siguientes ocho ecuaciones:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = \frac{(1-\tau_t^l)}{(1+\tau_t^c)} W_t \quad (6.99)$$

$$\frac{(1+\tau_t^c)C_t}{(1+\tau_{t-1}^c)C_{t-1}} = \beta \left[(1-\tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] \quad (6.100)$$

$$R_t = \frac{\alpha A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t} \quad (6.101)$$

$$W_t = \frac{(1-\alpha)A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_t} \quad (6.102)$$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.103)$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \quad (6.104)$$

$$C_t + I_t = Y_t \quad (6.105)$$

$$G_t = \tau_t^c C_t + \tau_t^l W_t L_t + \tau_t^k (R_t - \delta) K_t \quad (6.106)$$

Vamos a continuación a analizar los efectos de los impuestos. En primer lugar vamos a considerar únicamente la existencia del impuesto sobre el consumo, es decir, vamos a suponer que $\tau_t^l = \tau_t^k = 0$. En este caso, vemos que el impuesto sobre el consumo aparece en las siguientes condiciones de equilibrio:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = \frac{1}{(1+\tau_t^c)} W_t \quad (6.107)$$

$$\frac{(1+\tau_t^c)C_t}{(1+\tau_{t-1}^c)C_{t-1}} = \beta [(R_t - \delta) + 1] \quad (6.108)$$

En el caso en el que el tipo impositivo sobre el consumo sea constante en el tiempo tendríamos que:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [(R_t - \delta) + 1] \quad (6.109)$$

por lo que no afectaría a las decisiones de inversión del individuo ni al proceso de acumulación de capital. Sin embargo, observamos que este tipo impositivo tiene efectos distorsionadores sobre la oferta de trabajo. Esto es debido a que el impuesto sobre el consumo hace que los bienes sean más caros, lo que reduce el poder adquisitivo del salario. De hecho ahora el precio de los bienes de consumo sería $P_t = 1 + \tau_t^c$, lo que significa un menor salario en términos reales. Dado que el salario es la variable que utiliza el individuo para calcular la utilidad de una unidad de tiempo dedicada a ocio respecto a esa misma unidad de tiempo dedicada a trabajo, el cambio en el salario va a alternar la decisión del individuo respecto a cuanto tiempo va a dedicar a trabajar. Así, cuanto mayor sea el impuesto sobre el consumo menor va a ser la oferta de trabajo. Por su parte, también observamos que la ecuación de inversión únicamente se ve afectada si se producen variaciones del impuesto sobre el consumo en el tiempo.

En segundo lugar, si suponemos que $\tau_t^c = \tau_t^k = 0$, observamos que el impuesto sobre la renta aparece en la ecuación de oferta de trabajo, tal que esta ecuación sería:

$$\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1 - \tau_t^l) W_t \quad (6.110)$$

El impuesto sobre las rentas del trabajo tiene el efecto de disminuir el salario real, lo que va a llevar a una disminución en la oferta de trabajo. En este sentido, el efecto de un aumento en el impuesto del consumo es similar al aumento del impuesto sobre las rentas salariales.

Finalmente si $\tau_t^c = \tau_t^l = 0$, observamos que el impuesto sobre el capital aparece en la ecuación de acumulación de capital:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta \left[(1 - \tau_t^k)(R_t - \delta) + 1 \right] \quad (6.111)$$

Esta expresión nos indica que el impuesto sobre el capital va a afectar al proceso de inversión y a la senda óptima de consumo del individuo. Es más dado que la inversión es un cambio de consumo hoy por consumo futuro, el tipo impositivo sobre el capital puede entenderse como un impuesto sobre el consumo futuro.

Por tanto, obtenemos que los tres tipos impositivos considerados introducen diferentes efectos distorsionadores sobre las decisiones de los individuos, que van a alejar la solución competitiva respecto a la solución planificada, por lo que no se van a cumplir los teoremas del bienestar.

6.6 Ampliaciones al modelo básico

El modelo presentado anteriormente contiene los elementos básicos necesarios para analizar el comportamiento de una economía a nivel agregado, en términos de las principales variables macroeconómicas, y bajo unos supuestos que pueden ser muy restrictivos, de una economía competitiva donde las asignaciones resultantes son walrasianas. De hecho se trata de un modelo altamente agregado, con un alto grado de simplificación de la realidad, algo que precisamente lo hace extremadamente útil pero que también puede presentar una desventaja para aplicarlo a diferentes contextos y situaciones que observamos en la realidad. Sin embargo, al igual que hemos introducido los impuestos y el gobierno en el modelo básico en la sección anterior, la estructura teórica estudiada puede ser alterada introduciendo una gran cantidad de elementos con objeto de ir adaptando la estructura teórica a la realidad.

En contexto en el que está basado nuestro modelo tiene 4 ingredientes, que pueden ser modificados en función de la observación empírica. Estos 4 elementos fundamentales sobre los que se construye el modelo de equilibrio general son los siguientes:

- **Preferencias:** Las preferencias hacen referencia a la función objetivo de los distintos agentes que intervienen en la economía. Así, la base del modelo es que los agentes maximizan una determinada función objetivo. Por tanto, hemos de especificar

cómo es esta función objetivo. En el caso de los consumidores esta función objetivo es la utilidad o felicidad. En el caso de las empresas, esta función objetivo son los beneficios. El objetivo del gobierno podríamos definirlo en términos de maximizar el bienestar social, mientras que el objetivo del Banco Central sería la lucha contra la inflación.

- **Dotaciones:** Consiste en la definición de las dotaciones iniciales para cada uno de los agentes de la economía, así como la definición de quiénes son los propietarios de éstas.
- **Tecnología:** Este elemento define cómo la economía transforma inputs, es decir, factores productivos en producción. La tecnología constituye un aspecto esencial del modelo, por cuanto determina como son los rendimientos de los distintos factores productivos.
- **Entorno institucional:** El entorno institucional hace referencia a las restricciones de carácter institucional que determinan las relaciones entre los distintos agentes económicos, así como a la información. Así, es necesario definir cómo los diferentes mercados, si competitivos o bien de competencia imperfecta, si existen rigideces en la economía, el papel que se le asigna al gobierno, etc, así como la disponibilidad de información .

El modelo básico de equilibrio general considera la existencia de dos agentes: consumidores y empresas. El número de agentes puede ampliarse, incluyendo el gobierno, el banco central, los capitalistas, el sistema financiero, etc. Los diferentes tipos de agentes que pueden considerarse en un modelo de equilibrio general son los siguientes:

- **Consumidores:** Los consumidores son los agentes que toman decisiones de consumo-ahorro y decisiones en relación al ocio o, equivalentemente, en relación a la oferta de trabajo. En términos generales, también son estos agentes los que toman las decisiones de inversión, a través de su decisión de ahorro. El comportamiento dinámico del modelo está basado fundamentalmente en las decisiones de consumo que toma este agente, dados unos precios de los factores productivos que posee como dotación, y los precios de las mercancías que desea consumir.

- **Empresas:** Las empresas son las unidades productivas de la economía. Estas deciden qué cantidad de factores productivos quieren alquilar, tomando como dados el precios de los factores productivos: capital y trabajo. Las empresas aplican una función tecnológica a estos factores productivos para producir los bienes finales.
- **Capitalistas:** Los capitalistas son agentes que deciden el nivel de inversión de la economía. Este tipo de agentes se incluye en algunos modelos con el propósito de diferenciar las decisiones de ahorro de las decisiones de inversión. En este caso se trataría de un agente diferente al consumidor.
- **El gobierno:** El gobierno es el agente que decide fundamentalmente la política fiscal. Así, el gobierno es el agente que fija el menú de impuestos y el que determina el volumen y tipo de gasto público.
- **Banco Central:** La figura del Banco Central se introduce en el modelo cuando su objetivo es el estudio de los efectos de la política monetaria. Habitualmente el Banco Central se incluye en los modelos de EGD a través de la regla de Taylor.
- **Sistema Financiero:** En determinados modelos de EGD se incluye una figura adicional, que refleja el comportamiento del sistema financiero. En este caso, existen diferentes tipos de interés en la economía, siendo distintos los tipos que aplican a si los agentes prestan o si piden dinero prestado.
- **Sector exterior:** Reflejaría el comportamiento del conjunto de agentes que forman las otras economías con las cuales existen relaciones económicas y que por tanto afectan al equilibrio de la economía. En este caso, el comportamiento del resto del mundo se toma como dado, al considerar que nuestra economía es relativamente pequeña frente a este resto del mundo.

A continuación vamos a analizar brevemente algunas de las ampliaciones que podemos introducir en la estructura básica estudiada anteriormente y que dan lugar a modelos relativamente más complejos.

6.6.1 Restricciones a la liquidez

La existencia de restricciones a la liquidez supone que no todos los agentes de una economía pueden realizar su plan óptimo de consumo debido a que no pueden endeudarse en la cantidad que desearían. Esto está provocado por el hecho de que los mercados de capitales no son perfectos, existiendo la posibilidad de transferir renta del presente al futuro pero existiendo ciertas limitaciones no contempladas en el modelo para transferir renta desde el futuro al presente.

La existencia de restricciones a la liquidez supone una desviación importante respecto al modelo estudiado anteriormente. Así, en este contexto, ante una determinada perturbación las alteraciones en la senda óptima de consumo serían diferentes a las presentadas anteriormente, debido a que una parte de la economía no tendría acceso al crédito para endeudarse. En este caso, los efectos de alteraciones en los impuestos tendrían consecuencias sobre las decisiones de los individuos.

Una forma de introducir la existencia de restricciones a la liquidez en el modelo de equilibrio general consiste en suponer que la economía está compuesta por dos tipos de agentes: unos agentes que tienen acceso al crédito y otros agente que no tienen acceso al mismo. De este modo suponemos que el porcentaje de la población μ_t tiene acceso libre a los mercados de capitales (población i) mientras que otra fracción de la población $1 - \mu_t$ no tiene ningún acceso a los mercados de capitales (población j). La función a maximizar es exactamente la misma para ambas fracciones de la población, pero las restricciones presupuestarias son diferentes. Así, para el primer grupo de agentes la restricción presupuestaria sería:

$$C_t^i + I_t^i = W_t^i L_t^i + R_t^i K_t^i \quad (6.112)$$

mientras que para la otra fracción de la población la restricción presupuestaria sería:

$$C_t^j = W_t^j L_t^j \quad (6.113)$$

Es decir, una fracción de la población puede ahorrar (o desahorrar) y es la que acumula capital mientras que la otra fracción no tiene decisiones de ahorro y simplemente consume en cada periodo la renta que obtiene en dicho periodo. Cada grupo de agentes maximizarían

su utilidad sujeta a su respectiva restricción presupuestaria, siendo el consumo total de la economía y el empleo total de la economía una media ponderada de los valores de cada grupo tal que:

$$C_t = \mu_t C_t^i + (1 - \mu_t) C_t^j \quad (6.114)$$

$$L_t = \mu_t L_t^i + (1 - \mu_t) L_t^j \quad (6.115)$$

Por su parte, dado que sólo el primer grupo de agentes puede tomar decisiones de ahorro, todo el capital pertenece a este primer grupo de agentes por lo que el capital total de la economía es:

$$K_t = \mu_t K_t^i \quad (6.116)$$

6.6.2 Hábitos de consumo

El modelo básico supone que la utilidad en un periodo depende únicamente del consumo realizado en dicho periodo, sin verse afectada por los consumos realizados en periodos anteriores. Sin embargo, una característica que encontramos en el patrón de consumo de los individuos es lo que se denomina el hábito de consumo. La existencia de hábitos de consumo es un elemento que puede explicar el exceso de sensibilidad del consumo respecto a la renta actual, ya que las preferencias no son separables en el tiempo.

La forma que hemos considerado para introducir los hábitos de consumo implica la no separabilidad de las preferencias en el tiempo. Bajo la existencia de hábitos de consumo, un aumento en el consumo actual disminuye la utilidad marginal del consumo en el momento actual, pero la aumenta en el siguiente periodo. Lo contrario también sería cierto.

Una forma habitual de tratar los hábitos de consumo es considerarlos como algo externo a los consumidores. Esto es lo que se conoce en la literatura como "hábitos externos". Cuando los hábitos son externos, el stock de hábitos depende de la historia del consumo agregado en el pasado y no del consumo pasado del propio agente.

La forma funcional más habitualmente utilizada en la literatura, es introducir dentro de la función de utilidad del individuo una cuasi diferencia del consumo. De este modo la utilidad del individuo en un determinado periodo no dependería del nivel de consumo de dicho periodo sino de la cuasi-diferencia del mismo. Otra forma

de introducir los hábitos de consumo es considerar en la función de utilidad un cuasi-ratio de consumo en lugar de una cuasi-diferencia del consumo.

Especificaciones más generales permiten que el nivel de hábitos sea una función de todos los consumos pasados. Así podemos suponer que la función de utilidad es:

$$U(C_t - \phi S_{t-1}) \quad (6.117)$$

donde

$$S_{t-1} = S(C_{t-1}, C_{t-2}, \dots) \quad (6.118)$$

siendo S_{t-1} el stock de hábitos en el momento t . El parámetro ϕ representa la intensidad de los hábitos de consumo y es el que introduce la no-separabilidad de las preferencias a lo largo del tiempo. Su implicación más directa es que un aumento del consumo actual disminuye la utilidad marginal del consumo en el periodo actual pero la aumenta en el periodo siguiente. Intuitivamente significa que cuanto más comamos hoy, con más hambre nos levantaremos mañana. De esta forma capturamos los hábitos de consumo que presentan los agentes. En términos general se supone que el stock de hábitos sigue un proceso autorregresivo de primer orden, AR(1), tal que:

$$S_t = (1 - \delta_S)S_{t-1} + \theta C_t \quad (6.119)$$

donde el parámetro δ_S es la tasa de depreciación del stock de hábitos y el parámetro θ mide la sensibilidad del stock de hábitos respecto al consumo actual.

En particular, vamos a suponer que el consumidor representativo maximiza la siguiente función de utilidad:

$$U(C_t - D_t, O_t) \quad (6.120)$$

donde C_t es el consumo, D_t representa los hábitos de consumo y O_t hace referencia al ocio. En cuanto a los hábitos de consumo, suponemos que son proporcionales al consumo realizado en el periodo anterior, tal que:

$$D_t = \phi C_{t-1} \quad (6.121)$$

donde $\phi > 0$ es el coeficiente de persistencia en los hábitos de consumo. Esto significa que en la función de utilidad instantánea no sólo aparece el consumo actual, sino también el nivel de consumo del periodo inmediatamente anterior. La interpretación económica de este términos es que la utilidad que se obtiene por el consumo actual es relativa al consumo realizado en el periodo anterior.

El problema de los consumidores sería ahora:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log(C_t - \phi C_{t-1}) + (1 - \gamma) \log(N_t \bar{H} - L_t)] \quad (6.122)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + K_{t+1} = W_t L_t + (R_t + 1 - \delta) K_t \quad (6.123)$$

Las condiciones de primer orden del problema de los consumidores vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} : \beta^t \left[\gamma \frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \lambda_t \right] - \beta^{t+1} \left[\gamma \phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} \right] = 0 \quad (6.124)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} : -(1 - \gamma) \frac{1}{N_t \bar{H} - L_t} + \lambda_t W_t = 0 \quad (6.125)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} : E_t \beta^t \lambda_{t+1} [R_{t+1} + 1 - \delta] - \lambda_t \beta^{t-1} = 0 \quad (6.126)$$

donde λ_t es el multiplicador de Lagrange asignado a la restricción presupuestaria en el momento t . Despejando el parámetro de Lagrange, obtenemos:

$$\lambda_t = \gamma \frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \beta \gamma \phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t}$$

Combinando las ecuaciones (6.124) y (6.125) obtenemos la condición que iguala la desutilidad marginal de una hora adicional de trabajo con la utilidad marginal de los ingresos derivados de dicha hora trabajada:

$$(1 - \gamma) \frac{1}{N_t \bar{H} - L_t} = \left[\gamma \frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \beta \gamma \phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} \right] W_t \quad (6.127)$$

Combinando la ecuación (6.124) con la ecuación (6.126) obtenemos la condición de primer orden intertemporal,

$$\frac{\left[\gamma \frac{1}{C_t - \phi C_{t-1}} - \beta \gamma \phi \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} \right]}{\left[\gamma \frac{1}{C_{t+1} - \phi C_t} - \beta \gamma \phi \frac{1}{C_{t+2} - \phi C_{t+1}} \right]} = \beta [R_{t+1} + 1 - \delta]$$

que nos indica cual es la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo. Si $\phi = 0$ estaríamos en el caso básico.

6.6.3 Ratio de uso variable del capital

El modelo básico supone que el capital se utiliza totalmente en el proceso productivo en cada momento del tiempo. Sin embargo, en la realidad observamos situaciones en las cuales el ratio de uso del capital cambia a lo largo del ciclo. Así, los agentes pueden tomar decisiones sobre qué parte del capital disponible utilizan en el proceso productivo. Este hecho puede tener importantes implicaciones sobre el comportamiento resultante de la economía. Definimos el ratio de uso del capital como:

$$u_t > 0$$

Por su parte, existe una función del ratio de uso del capital que denominamos $\Phi(u_t)$ y que representa el coste físico de uso del capital. Esta función tiene la siguiente forma funcional: $\Phi'(u_t) > 0, \Phi(u_t)'' > 0$. La función convexa y creciente, $\Phi(u_t)$, muestra el coste, en unidades de consumo, de fijar una determinada ratio de uso del capital. De este modo, la rentabilidad del capital vendría dada por:

$$R_t u_t K_t - \Phi(u_t) K_t$$

Un posible forma funcional sería la siguiente:

$$\Phi(u_t) = \Phi_1(u_t - 1) + \frac{\Phi_2}{2}(u_t - 1)^2$$

La decisión sobre la utilización del capital está relacionada con el concepto de Keynes de coste de uso del capital. Así, una mayor ratio de utilización del capital provoca una depreciación más rápida del capital. La idea es simple. Cuanto mayor sea el uso de una maquina, mayor es su depreciación. Por tanto, la ratio de depreciación física del capital no sería ahora una constante, sino que dependería del ratio de uso del capital.

$$K_{t+1} = (1 - \delta(u_t))K_t + I_t \quad (6.128)$$

En particular, podemos suponer que:

$$\delta(u_t) = \delta u_t^\eta$$

siendo η un parámetro positivo. Suponiendo la anterior función, la ecuación de acumulación de capital podemos escribirla como:

$$K_{t+1} = (1 - \delta u_t^\eta)K_t + I_t \quad (6.129)$$

El problema de los consumidores sería ahora:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t, u_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.130)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + K_{t+1} = W_t L_t + R_t u_t K_t \quad (6.131)$$

Sustituyendo la ecuación de acumulación de capital resulta:

$$C_t + K_{t+1} = W_t L_t + (R_t u_t + 1 - \delta u_t^\eta)K_t \quad (6.132)$$

La función de producción vendría dada en este caso por:

$$Y_t = A_t (u_t K_t)^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (6.133)$$

donde A_t es una medida de la productividad total de los factores, α es la proporción de las rentas de capital sobre la renta total y $(1-\alpha)$ la proporción de las rentas salariales sobre la renta total.

Las condiciones de primer orden del problema de los consumidores vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} : \beta^t \left[\gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t \right] = 0 \quad (6.134)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} : -(1 - \gamma) \frac{1}{1 - L_t} + \lambda_t W_t = 0 \quad (6.135)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} : \beta^t \lambda_{t+1} [R_{t+1} u_{t+1} + 1 - \delta u_{t+1}^\eta] - \lambda_t \beta^{t-1} = 0 \quad (6.136)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} : -\lambda_t (R_t - \omega \delta u_t^{\eta-1}) K_t = 0 \quad (6.137)$$

Combinando las ecuaciones (6.134) y (6.135) obtenemos la condición que iguala la desutilidad marginal de una hora adicional de trabajo con la utilidad marginal de los ingresos derivados de dicha hora trabajada:

$$(1 - \gamma) \frac{1}{1 - L_t} = \gamma \frac{1}{C_t} W_t \quad (6.138)$$

Combinando la ecuación (6.134) con la ecuación (6.136) obtenemos la condición de primer orden intertemporal,

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta [R_{t+1} u_{t+1} + 1 - \delta u_{t+1}^\eta]$$

que nos indica cual es la senda óptima de consumo a lo largo del tiempo. Por otra parte, a partir de la última condición de primer orden obtenemos que:

$$R_t = \eta \delta u_t^{\eta-1}$$

6.6.4 Costes de ajuste de la inversión

En el modelo básico se supone una ecuación de acumulación de capital en la cual la evolución del capital depende de las decisiones de inversión. Sin embargo, en la práctica los procesos de inversión llevan parejo un coste asociado al cambio en el stock del capital. Esta es precisamente la base del modelo de la Q de Tobin, en el cual la dinámica de la inversión es más compleja debido a la presencia de costes de ajuste asociados a las decisiones de inversión.

En este caso la ecuación de acumulación de capital vendría dada por:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + \left[1 - \Psi\left(\frac{I_t}{I_{t-1}}\right)\right] I_t \quad (6.139)$$

donde I_t es la inversión bruta y $\Psi(\cdot)$ es una función de costes de ajuste, que depende positivamente de los cambios en la inversión, tal que $\Psi''(\cdot) > 0$ y $\Psi(\delta \bar{K}) = 0$.

El problema de los consumidores sería ahora:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t, K_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.140)$$

sujeto a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t \quad (6.141)$$

y a la restricción asociada al proceso de acumulación del capital:

$$Q_t \left\{ K_t - (1 - \delta)K_{t-1} - \left[1 - \Psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] I_t \right\} \quad (6.142)$$

donde Q_t es el multiplador de Lagrange asociado a la evolución del capital instalado. Esto es lo que se conoce también como la Q de Tobin que se define como la ratio del valor del capital instalado respecto al coste de reemplazamiento del capital.

La función de Lagrange asociada al problema de los consumidores es:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t, K_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{array}{l} [\gamma \log(C_t) + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \\ - \lambda_t (C_t + I_t - W_t L_t - R_t K_{t-1}) \\ - Q_t \left(K_t - (1 - \delta)K_{t-1} - \left[1 - \Psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \right] I_t \right) \end{array} \right\} \quad (6.143)$$

Las condiciones de primer orden del problema serían:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} : \beta^t \left[\gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} : \beta^t \left[- (1 - \gamma) \frac{1}{1 - L_t} + \lambda_t W_t \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} : \beta^{t+1} [\lambda_{t+1} R_{t+1} + (1 - \delta)Q_{t+1}] - \beta^t Q_t = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} : \beta^t & \left[Q_t - Q_t \Psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - Q_t \Psi' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} - \lambda_t \right] \\ & + \beta^{t+1} Q_{t+1} \Psi' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Definimos la Q de Tobin marginal como q_t , donde:

$$q_t = \frac{Q_t}{\lambda_t} \quad (6.144)$$

es decir, es el ratio de los dos multiplicadores de Lagrange. Por tanto, tendríamos que $Q_t = q_t \lambda_t$. Operando en la condición de equilibrio para el capital resulta que:

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_t} Q_t = \beta [\lambda_{t+1} R_{t+1} + (1 - \delta) Q_{t+1}]$$

Por tanto tendríamos que:

$$q_t = \beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} [q_{t+1}(1 - \delta) + R_{t+1}]$$

La expresión anterior indica que el valor del capital instalado depende del valor esperado futuro teniendo en cuenta el ratio de depreciación y la tasa de rentabilidad esperada.

Por otra parte, operando en la condición de primer orden para la inversión obtenemos:

$$\begin{aligned} & \beta^t \frac{\lambda_t}{\lambda_t} \left[Q_t - Q_t \Psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - Q_t \Psi' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} - \lambda_t \right] \\ = & -\beta^{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_{t+1}} Q_{t+1} \Psi' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta^t \left[q_t - q_t \Psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - q_t \Psi' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right] \\ = & \beta^{t+1} \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t} q_{t+1} \Psi' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 \end{aligned}$$

$$q_t - q_t \Psi \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) - q_t \Psi' \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \frac{I_t}{I_{t-1}} + \beta \frac{C_t}{C_{t+1}} q_{t+1} \Psi' \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right) \left(\frac{I_{t+1}}{I_t} \right)^2 = 1$$

La condición de primer orden respecto a la inversión tiene una interpretación simple. Así, si $\Psi(\cdot) = 0$, es decir, en el caso de que no existiesen costes de ajuste, entonces tendríamos que $q_t = 1$, es decir la Q marginal de Tobin sería igual al coste de reemplazamiento del capital en términos del bien final.

6.6.5 Progreso tecnológico específico a la inversión

En el modelo básico suponemos que los activos de capital que se incorporan a la economía periodo a periodo tiene las mismas características. Esto nos permite definir el stock de capital en un momento dado del tiempo como el stock de capital existente en el periodo anterior, descontado lo que se pierde por depreciación más la inversión. Esto significa que estamos suponiendo que la calidad del capital que se incorpora en cualquier momento del tiempo es la misma, sin que se altere como consecuencia del progreso tecnológico. De este modo la incorporación de una unidad de capital (por ejemplo, un ordenador) hoy no es exactamente igual que dicha unidad de capital incorporada en el pasado, debido a que la carga tecnológica implícita es mucho mayor. Esto significa que una unidad de consumo gastada en inversión, es más rentable conforme mayor sea el progreso tecnológico que incorpora el capital.

El elemento clave del modelo es que el proceso de acumulación de capital viene definido como:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + Z_t I_t \quad (6.145)$$

donde δ es el ratio de depreciación. Z_t determina la cantidad de capital que puede ser comprada con una unidad de producción, representando el estado actual de la tecnología para producir capital. En el modelo estándar tendríamos que $Z_t = 1$ para todo t , es decir, la cantidad de capital que puede ser comprada con una unidad de producción final es constante en el tiempo. Sin embargo, en la realidad el precio relativo del capital disminuye en términos generales, evidenciando que a lo largo del tiempo, podemos comprar una mayor cantidad de capital con la misma cantidad de producción final.

El problema al que se enfrentan los consumidores consiste en elegir C_t , L_t , e I_t tal que maximizen su utilidad intertemporal:

$$\max_{(C_t, I_t, L_t)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.146)$$

sujeto a la restricción presupuestaria y a la ley de acumulación de capital definida por (6.145).

Las condiciones de primer orden derivadas del problema del consumidor son las siguientes:

$$\gamma C_t^{-1} = \lambda_t \quad (6.147)$$

$$(1 - \gamma) 1 - L_t^{-1} = \lambda_t W_t \quad (6.148)$$

$$\beta \frac{Z_t}{Z_{t+1}} [Z_{t+1} R_{t+1} + 1 - \delta] = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} \quad (6.149)$$

Combinando las condiciones de primer orden obtenemos que la condición estática para el trabajo es:

$$\frac{1 - \phi}{\phi} \frac{C_t}{1 - L_t} = W_t \quad (6.150)$$

mientras que la senda óptima de consumo viene dada por:

$$\frac{1}{\beta} \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{Z_t}{Z_{t+1}} [Z_{t+1} R_{t+1} + 1 - \delta] \quad (6.151)$$

En este caso, las decisiones de inversión y, por tanto, la senda óptima de consumo, estarían afectados por el progreso tecnológico implícito al nuevo capital que se incorpora a la economía.

6.6.6 Economía abierta

Todos los análisis realizados anteriormente han tenido como objetivo analizar una economía cerrada. Sin embargo, el modelo anterior puede extenderse fácilmente para estudiar una economía abierta. En este caso tenemos en cuenta la posibilidad de relaciones comerciales entre nuestra economía y el resto del mundo. Estas relaciones comerciales van a consistir en el intercambio tanto de bienes como de capital. Así, la economía puede presentar déficit o superávit en la balanza por cuenta corriente. Vamos a suponer que ahora la economía puede importar bienes del exterior, que pueden utilizarse para consumir o bien para invertir en capital.

El problema del consumidor vendría dado por la maximización del siguiente problema:

$$\max_{(C_t, I_t, O_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \quad (6.152)$$

sujeito a la restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t + S_t D_t = W_t L_t + R_t K_t + (1 + R_t^*) S_{t-1} D_{t-1} \quad (6.153)$$

donde la inversión viene definida por:

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta) K_t$$

siendo S_t el tipo de cambio nominal, definido como unidad de moneda nacional por unidad de moneda extranjera y donde D_t es un bono o activo del exterior, que nos va a indicar la posición deudora o acreedora de nuestra economía, siendo R_t^* el tipo de interés del exterior. Si suponemos que nuestra economía es pequeña, el tipo de interés del exterior viene dado, por lo que se trata de una variable exógena.

Para resolver dicho problema construimos el Lagrangiano:

$$\max_{(C_t, K_t, L_t, D_t)} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\begin{array}{c} [\gamma \log C_t + (1 - \gamma) \log(1 - L_t)] \\ C_t + S_t D_t + K_{t+1} - W_t L_t \\ -\lambda_t \left[-(R_t + 1 - \delta) K_t - (1 + R_{t-1}^*) S_{t-1} D_{t-1} \right] \end{array} \right) \quad (6.154)$$

Ahora hay una variable de elección adicional, que es la cantidad de activos del exterior. Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = \gamma \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \quad (6.155)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_t} = -\frac{1 - \gamma}{1 - L_t} + \lambda_t W_t = 0 \quad (6.156)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = \beta^t \lambda_t (R_t + 1 - \delta) - \beta^{t-1} \lambda_{t-1} = 0 \quad (6.157)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_t} = -\beta^t \lambda_t S_t + \beta^{t-1} \lambda_{t-1} (1 + R_t^*) S_{t-1} = 0 \quad (6.158)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + S_t D_t + K_{t+1} - W_t L_t - (R_t + 1 - \delta) K_t - (1 + R_{t-1}^*) S_{t-1} D_{t-1} = 0 \quad (6.159)$$

Sustituyendo la condición de primer orden (6.155) en la condición de primer orden (6.156), obtenemos la condición que iguala el ratio

de sustitución marginal entre consumo y ocio al coste de oportunidad de una unidad adicional de ocio:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = W_t \quad (6.160)$$

Sustituyendo la condición de primer orden (6.155) en la condición de primer orden (6.157), obtenemos la condición que iguala el ratio marginal del consumo con el de la inversión:

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [R_t + 1 - \delta] \quad (6.161)$$

Por otra parte, del problema de maximización de la empresa sabemos que R y W son iguales a sus productos marginales:

$$R_t = \alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} \quad (6.162)$$

$$W_t = (1-\alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.163)$$

Sustituyendo en las condiciones de equilibrio del consumidor obtenemos:

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{C_t}{1-L_t} = (1-\alpha) A_t K_t^\alpha L_t^{-\alpha} \quad (6.164)$$

$$\frac{C_t}{C_{t-1}} = \beta [\alpha A_t K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} + 1 - \delta] \quad (6.165)$$

Sustituyendo el precio sombra de consumo en la condición de primer orden respecto a los bonos del exterior resulta:

$$-\frac{1}{C_t} S_t + \beta^{-1} \frac{1}{C_{t-1}} (1 + R_{t-1}^*) S_{t-1} = 0 \quad (6.166)$$

o equivalentemente:

$$\beta S_t C_{t-1} = (1 + R_{t-1}^*) S_{t-1} C_t \quad (6.167)$$

6.6.7 Ampliación Nuevo Keynesiana

Aunque el modelo anterior tiene una base neoclásica también se toma como referencia para la construcción del denominado modelo nuevo keynesiano. El modelo nuevo keynesiano parte de los desarrollos

realizados anteriormente pero introducido rigideces en salarios y precios. La idea es intentar ajustar el modelo al hecho observado de que los precios muestran una elevada persistencia, es decir, muestran una elevada rigidez al cambio. En este caso estaríamos en un contexto de competencia monopolística, donde las empresas fijan el precio del bien diferenciado que producen, bajo la existencia de un determinado mecanismo de ajuste en dichos precios.

Las diferentes versiones del modelo nuevo keynesiano presentan un elevado nivel de complejidad derivado del proceso de ajuste en los precios. Estos modelos son los que están desarrollando los Bancos Centrales y otros organismos en la actualidad para el análisis del entorno económico y evaluación de las políticas económicas.

Parte III

Crecimiento Económico

7

Introducción al crecimiento económico

- 7.1. Introducción
- 7.2. El fenómeno del crecimiento económico
- 7.3. La acumulación de capital
- 7.4. La tasa de crecimiento de la economía
- 7.5. El progreso tecnológico
- 7.6. Descomposición del crecimiento

7.1 Introducción

El crecimiento en el nivel de producción agregada a lo largo del tiempo constituye uno de los aspectos más importantes del comportamiento de una economía y es quizás la mayor cuestión, junto con las fluctuaciones cíclicas, al que intenta dar una explicación el análisis económico. Cuanto mayor sea el nivel de producción de una economía, mayores son sus posibilidades de consumo y, por tanto, mayor es el nivel de bienestar que puede alcanzar, dado que, en el ámbito estrictamente económico, suponemos que el nivel de bienestar de una sociedad depende positivamente de

su nivel de consumo. De hecho, si comparamos el nivel de bienestar de las sociedades en el momento actual podemos comprobar inmediatamente que es muy superior al existente en cualquier periodo anterior (cualquier periodo pasado siempre fue peor). Por tanto, no resulta desacertado afirmar que el objetivo último de la economía consiste en el estudio del fenómeno del crecimiento económico, dado que es el objetivo último que pretende alcanzar una sociedad.

En términos generales (con algunas importantes excepciones), observamos que la producción agregada de las economías aumentan a lo largo del tiempo, lo que posibilita que estas economías puedan optar a mayores niveles de consumo. Este fenómeno es el que ha permitido que los niveles de consumo aumenten de forma espectacular en las últimas décadas, configurando uno de los aspectos más relevantes del avance que presentan las sociedades (desarrolladas).

Cuando hablamos del crecimiento económico no estamos interesados en el nivel de producción total de una economía, sino en cómo es el nivel de producción en relación al tamaño de esta economía. Sólo relativizando por el tamaño podemos comparar el nivel de producción entre diferentes economías. Por ejemplo, el nivel de producción agregado de España es superior al de Suiza, pero esto no significa necesariamente que España sea más rica que Suiza. De hecho ocurre lo contrario, ya que la población de España es mucho mayor que la de Suiza, lo que lleva a que la renta por habitante en Suiza sea superior a la renta por habitante en España. Por tanto, un elemento importante en el análisis que vamos a llevar a cabo es la población y la dinámica de ésta.

El objetivo de este tema es introducir los elementos básicos de definen el fenómeno del crecimiento económico e intentar responder a un conjunto de preguntas que consideramos importantes. La primera pregunta es ¿porqué crecen las economías? Así, por ejemplo, observamos que el PIB en términos reales de la economía española es mayor en 2009 que en el año 2000, y que a su vez el del año 2000 es muy superior al existente digamos 20 años antes. Este fenómeno es común a las economías desarrolladas. Una segunda pregunta de interés sería ¿porqué unas economías son más ricas que otras? Efectivamente, si comparamos el nivel de riqueza (por ejemplo, utilizando la variable PIB per cápita) de Alemania con Etiopía

nos damos cuenta de la existencia de una diferencia descomunal. Entender cuales son los factores que explican dicha diferencia parece un reto importante. ¿Porqué unos países crecen más que otros? Si comparamos la tasa de crecimiento de España con la de Italia, nos damos cuenta que el primero presenta una tasa de crecimiento más elevada. ¿En qué consisten los milagros económicos? Por ejemplo, el caso de Corea del Sur o más recientemente el de China. Pueden ser ejemplos interesantes para otras economías. ¿Es posible que países hoy pobres mañana sean ricos y viceversa? A lo largo de la historia hemos asistido a importantes cambios en el nivel de desarrollo de los diferentes países, e incluso algunos países que en algún momento del tiempo han sido de los más ricos, han terminado desapareciendo o convirtiéndose en países pobres. ¿Es posible que ciertos países pobres sean siempre pobres? Si miramos a determinados países africanos nos surge la duda de si verdaderamente en algún momento del tiempo se convertirán en países desarrollados. Países de otras áreas geográficas también partían de niveles de riqueza muy bajos y sin embargo en la actualidad se han convertido en países desarrollados.

En este tema vamos a analizar algunos elementos básicos en torno al fenómeno del crecimiento económico utilizando un contexto muy simple en el cual la única variable endógena es el stock de capital. Para ello vamos a considerar que el ahorro es una variable exógena, análisis que fue desarrollado por Solow y Swan en los años sesenta. Por tanto, no se trata de un modelo de crecimiento en el cual las variables vienen determinadas por el comportamiento optimizador de los consumidores, sino que la fuente de ese crecimiento se supone exógena.

Dada una tasa de ahorro y definiendo la función de tecnología, podemos derivar una ecuación que nos indica cómo es el proceso de acumulación de capital de una economía. A partir del análisis realizado anteriormente, vamos a estudiar como es la dinámica de crecimiento de una economía, así como diferentes conceptos en relación a la misma, como el fenómeno de la convergencia. Posteriormente, vamos a ampliar el análisis introduciendo el progreso tecnológico, que es una de las características fundamentales del desarrollo de las sociedades y el principal motor del crecimiento económico. Finalmente, estudiamos un análisis denominado contabilidad del crecimiento, que nos permite cuantificar la

aportación a crecimiento de los distintos factores determinantes del mismo.

7.2 El fenómeno del crecimiento económico

Cuando observamos el comportamiento de una economía, podemos apreciar dos fenómenos de gran importancia, dependiendo del enfoque temporal adoptado. A corto y medio plazo (esto es, entre 2 y 10 años), observamos que las economías experimentan fluctuaciones en su nivel de producción, o más exactamente, en términos de su tasa de crecimiento. A esto es lo que llamamos las fluctuaciones cíclicas. Por el contrario, a largo plazo (esto es, más de 10 años), observamos que las economías muestran una senda creciente en su nivel de producción. A esto es lo que llamamos crecimiento económico.

La figura 7.1 muestra el nivel de producción de España, medido por el PIB en términos reales (como un índice de cantidad), es decir, descontando el efecto de las variaciones en los precios. Tal y como podemos observar, el nivel de producción experimenta fluctuaciones a lo largo de una senda de crecimiento positiva, indicando que el nivel de producción cada vez es mayor conforme pasa el tiempo. De hecho en 2008 el nivel de producción de la economía española es más de tres veces superior al existente en 1970.

La figura 7.2 muestra los mismos datos anteriores pero en tasas de crecimiento interanual. Es decir, cuanto ha aumentado el nivel de producción de un año respecto al año anterior. Dado que los datos anteriores tienen frecuencia trimestral, dicha tasa de crecimiento se calcula comparando el nivel de producción de un determinado trimestre respecto al nivel de producción que había en ese mismo trimestre en el año anterior. Varios comentarios pueden realizarse. En primer lugar, observamos que la mayoría de los periodos la tasa de crecimiento del PIB real ha sido positiva, evidenciando la existencia de crecimiento económico. De hecho, la tasa de crecimiento media para el periodo 1970-2008 ha sido del 3,06%, muy superior a la experimentada por otros países de nuestro entorno. Tan sólo durante la crisis de 1992-1993 observamos tasas de crecimiento negativas, al igual que en 2009. El resto de años las tasas de crecimiento han sido positivas y muy elevadas. De hecho, quitando los periodos de recesión y los primeros años de la década de los ochenta, el crecimiento de la economía española ha sido superior al 2% anual.

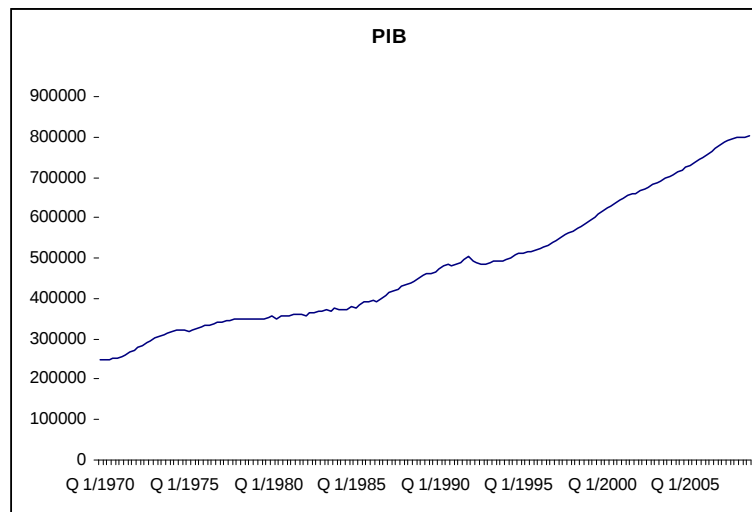


Figura 7.1. PIB a precios constantes de España: 1970-2008

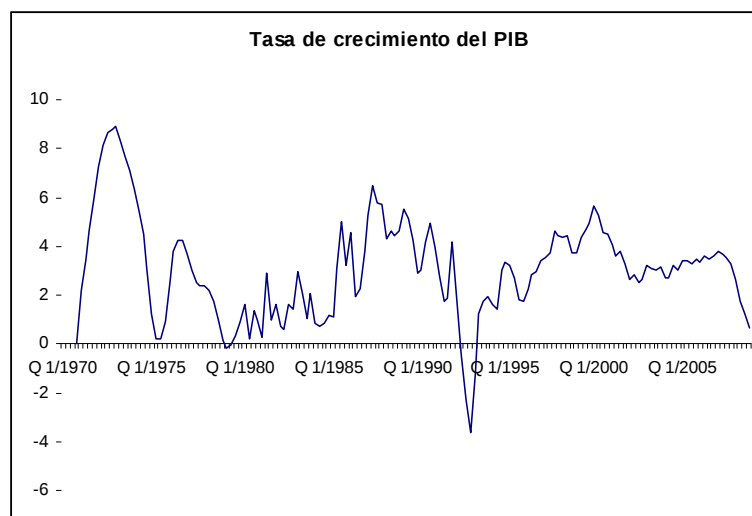


Figura 7.2. Tasa de crecimiento del PIB a precios constantes (crecimiento real) de España

Por tanto, nuestro interés se va a centrar en la tasa de crecimiento del PIB a precios constantes, es decir, de la tasa de crecimiento real de la economía. Vamos a definir el nivel de crecimiento de una economía como g , tal que:

$$g_t = \frac{PIB_t - PIB_{t-1}}{PIB_{t-1}} \quad (7.1)$$

Si definimos el nivel de producción de la economía en términos logarítmicos, tal que $y_t = \log(PIB_t)$, entonces la tasa de crecimiento la definiríamos como:

$$g_t = y_t - y_{t-1} \quad (7.2)$$

El crecimiento económico es un fenómeno acumulativo, lo que da lugar a situaciones que nos van a sorprender y que nos pueden parecer un tanto increíbles. Esto significa que la tasa de crecimiento de hoy es lo que ha aumentado el nivel de producción respecto al existente ayer. Pero sin embargo, el que obtuvimos ayer dependía de la tasa de crecimiento que existía ayer, esto es, el aumento sobre la producción de anteayer. Es decir, crecemos sobre lo que hemos crecido, lo que va a dar lugar a un fenómeno que en algunas ocasiones nos va a parecer extraño. Para ilustrar más claramente esto vamos a realizar a continuación algunos ejercicios.

Así, por ejemplo, si queremos calcular cual sería el nivel de producción de una economía transcurrido un determinado periodo de tiempo t , y dada una tasa de crecimiento g , multiplicaríamos su nivel de producción inicial por la expresión: $(1+g)^t$. Así, por ejemplo, una economía cuyo nivel de producción inicial es 10 y experimente una tasa de crecimiento del 2%, dentro de 50 años su nivel de producción sería:

$$10 \times (1 + 0,02)^{50} = 26,92$$

es decir, en sólo 50 años su nivel de producción será casi 3 veces superior al que tenía inicialmente. Este aumento tan significativo en un tiempo tan reducido se debe precisamente a que supone un proceso acumulativo. Para ilustrar esta características del fenómeno del crecimiento económico, la figura 7.3 muestra la evolución del nivel de producción de una economía cuyo nivel inicial es 1 y que crece a una tasa del 1%. Como podemos observar, presenta una forma exponencial ya que un 1% de aumento al principio del periodo

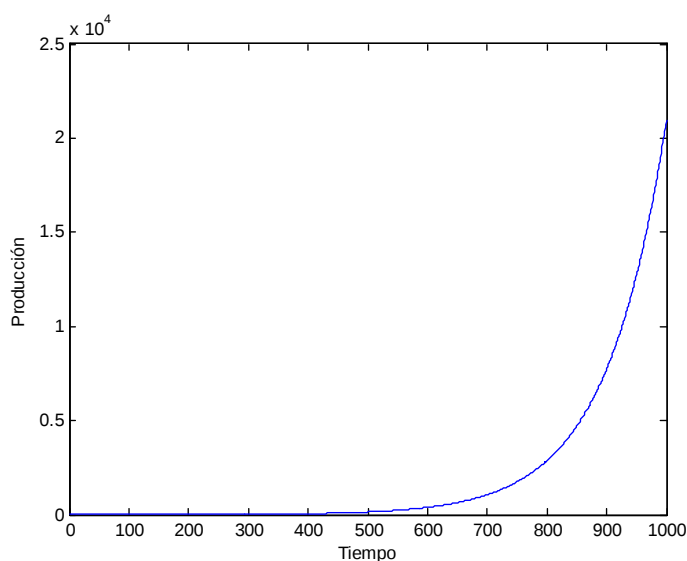


Figura 7.3. Evolución del nivel de producción con una tasa de crecimiento del 1%

arroja un valor muy inferior al que supone un 1% al final de periodo considerado.

Otro ejercicio que podemos realizar es calcular cuanto tardaría una economía en ser el doble de rica. Para ello simplemente tendríamos que calcular la siguiente expresión, dada una tasa de crecimiento:

$$(1 + g)^t = 2$$

Tomando logaritmos en la anterior expresión resulta:

$$t \ln(1 + g) = \ln 2$$

Despejando el tiempo, obtenemos que una economía que crece a una tasa g su nivel de producción será el doble aproximadamente cada $0,7/g$ años (dado que $\ln(1 + g) \simeq g$ y el logaritmo de 2 es 0,693). Así, por ejemplo, si suponemos que España tiene una tasa de crecimiento tendencial (a largo plazo) del 2%, esto supodría que sería el doble de rica cada 35 años, lo cual no está nada mal. Corea del Sur, que ha venido presentando una tasa de crecimiento tendencial del 6% sería el doble de rica en tan sólo 11,6 años. O el caso de

China, que con una tasa tendencial de crecimiento del 15% en los últimos años, doblaría su nivel de producción cada 4,6 años!

A lo largo de la historia los países más ricos del mundo han ido cambiando. Aunque no hay datos estadísticos fiables más allá del siglo XX, los centros de riqueza han ido cambiando lo largo del tiempo. Así, parece que en torno al año 1500, el país más rico del mundo era China, un país que posteriormente ha sido de los más pobres del mundo. En torno al año 1700 parece que las economías más ricas eran determinadas ciudades de Italia. En el Siglo XIX los países más ricos del mundo se situaban en el norte de Europa, mientras que desde 1900 el país más rico del mundo es Estados Unidos. A tenor de los ejercicios realizados anteriormente, estos bruscos cambios en el tiempo no deben sorprendernos, ya que pequeñas diferencias en las tasas de crecimiento pueden dar lugar a diferencias muy importantes entre economías en periodos de tiempo no excesivamente largos.

Otro ejemplo consistiría en comparar nuestro nivel de producción con el que hubiese existido hace más de 2000 años. Si suponemos que desde el año 0 hemos crecido a una tasa anual del 1%, el nivel de producción ahora sería más de **470 millones de veces** superior al de un romano en el año cero:

$$(1 + 0,01)^{2007} = 470.974.270 \quad (7.3)$$

Por cada casa que podía comprar un romano en el año cero nosotros podemos comprar 470 millones de casas. Por cada ordenador (sí, no se trata de un error) que podría comprar un romano en el año cero nosotros podemos comprar 470 millones de ordenadores. Este cálculo nos hace una idea de que podría ocurrir en el futuro si las economías siguen creciendo a tasas como las actuales.

También podemos hacer un sencillo ejemplo para ilustrar como pequeñas diferencias entre las tasas de crecimiento entre países, pueden dar lugar, en un plazo de tiempo no muy largo, a importantes diferencias en la riqueza. Vamos a suponer que tenemos tres países (A, B y C), que inicialmente presentan el mismo nivel de producción, pero que presentan tasas de crecimiento diferentes. Si hacemos la comparativa respecto a 1900 para diferentes tasas de crecimiento tendríamos:

$$(1 + 0,01)^{107} = 2,90 \quad (\text{PAIS 1})$$

$$(1 + 0,02)^{107} = 8,32 \quad (\text{PAIS 2})$$

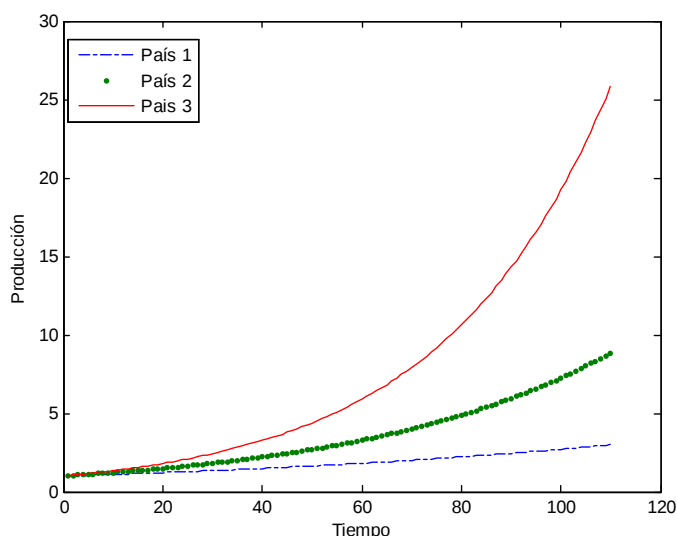


Figura 7.4. Niveles de producción con tres tasas de crecimiento diferentes

$$(1 + 0,03)^{107} = 23,64 \quad (\text{PAIS 3})$$

El país 1 que crece al 1%, aumenta su nivel de renta 3 veces. Pero es que durante el mismo periodo el país 2, que crece al 2% sería más de 8 veces más rico que inicialmente y, por tanto, casi tres veces más rico que el país 1. Por su parte, el país 3, que crece a una tasa media del 3%, sería 24 veces más rico que en el momento inicial, es decir, 3 veces más rico que el país 2. Por tanto, vemos como pequeñas desigualdades en tasas de crecimiento a largo plazo pueden dar lugar a diferencias importantísimas. Partiendo de una situación similar el país 3 sería en sólo un siglo 8 veces más rico que el país 1.

La tabla 7.1 muestra el nivel de PIB (en millones de dólares de 2006) para los 11 países con mayor nivel de producción agregada, es decir, las 11 economías más grandes del mundo en términos absolutos sin tener en cuenta el tamaño de esos países en términos de población. Como podemos observar EE.UU. presenta un nivel de producción muy superior al resto. Japón, que es el segundo en el ranking, presenta un nivel de producción 3 veces inferior al de EE.UU. Alemania, que es el tercer país con mayor producción, es 4 veces inferior al de EE.UU. Japón y Alemania tienen un nivel de producción inferior al de EE.UU., pero también su población es menor, por lo que este

dado no es informativo en términos de cual de los tres países es más rico. Por el contrario, China se sitúa en cuarta posición. Dado que sabemos que la población de China es superior a la de los tres países anteriores, ya sabemos que la riqueza de los chinos va a ser inferior a la de norteamericanos, japoneses y alemanes. España se sitúa en novena posición, con un nivel de producción muy similar al de Canadá, pero también hemos de tener en cuenta que la población de Canadá es inferior a la de España.

Tabla 7.1: Países con un mayor PIB (medido en millones de dólares) en 2006

Puesto	País	PIB
1	EEUU	13.195.000
2	Japón	4.366.000
3	Alemania	2.916.000
4	China	2.644.000
5	Reino Unido	2.399.000
6	Francia	2.252.000
7	Italia	1.853.000
8	Canadá	1.275.000
9	España	1.232.000
10	Brasil	1.068.000
11	Rusia	985.000

Fuente: Fondo Monetario Internacional (FMI)

La tabla 7.2 muestra los países más ricos del mundo utilizando una medida que nos permite comparar directamente los distintos países teniendo en cuenta su tamaño. En este caso en lugar de utilizar el nivel de producción agregado, utilizamos el nivel de producción per cápita, normalizado a 100 para el caso de EE.UU. Por tanto, el valor para cada país indica su porcentaje de renta per cápita en relación a la de EE.UU. La riqueza de Bélgica, tan sólo supone el 75% de la de EE.UU., mientras que la del Reino Unido, supera ligeramente el 70%. España aparece en el puesto 23, con una renta per cápita en torno al 54% de la de EE.UU. (es decir, EE.UU. es aproximadamente el doble de rico que España). Vemos como incluso entre los países más ricos, las diferencias son muy importantes, lo cual resulta llamativo, ya que no parece que existan importantes diferencias de carácter estructural

(la tasa de ahorro y las tecnologías son similares) entre los diferentes países que aparecen en la tabla.

Tabla 7.2: Ranking de los 25 países más ricos del mundo

Puesto	País	Indice	Puesto	País	Indice
1	EEUU	100,0	14	Holanda	74,0
2	Luxemburgo	93,6	15	Austria	72,2
3	Hong Kong	91,8	16	UK	70,9
4	Canada	91,2	17	Italia	70,9
5	Suiza	88,5	18	Singapur	70,5
6	Noruega	86,5	19	Islandia	70,3
7	Japón	84,2	20	Finlandia	66,9
8	Alemania	82,0	21	Nueva Zelanda	63,3
9	Australia	80,6	22	Israel	54,9
10	Dinamarca	78,5	23	España	54,6
11	Suecia	77,9	24	Irlanda	53,7
12	Francia	77,6	25	Chipre	51,3
13	Bélgica	75,1			

Fuente: Penn World Tables (2006)

La tabla 7.3 muestra la comparación de la renta per cápita para un conjunto de países seleccionados, así como su posición en el ranking internacional. En primer lugar se encuentra Estados Unidos, que es el país de referencia y al que le hemos dado un valor de 100. En el puesto 37 figura Brasil, pero con un valor de 21,6. Es decir, Estados Unidos es aproximadamente 5 veces más rico de Brasil. Estos datos ponen en evidencia las importantes diferencias que existen en el mundo en términos de renta per cápita. Simplemente contando los 25 países más ricos del mundo ya encontramos que las diferencias llegan al 50%, tal y como pone de manifiesto la tabla anterior. Contando los 50 países más ricos del mundo las diferencias llegan casi al 90%. Si nos desplazamos a Africa las diferencias son aún más grandes, con un nivel de renta per cápita inferior al 5% del de EE.UU.

Los datos anteriores ponen en evidencia las importantes diferencias que existen entre los niveles de renta de los distintos países. Explicar el porqué de estas importantes diferencias y de su evolución a lo largo del tiempo va a ser el principal objetivo de los análisis que vamos a realizar a continuación.

Tabla 7.3: Ranking de países por renta per cápita en relación a EEUU

Puesto	País	Índice
1	EEUU	100,0
37	Brasil	21,6
43	Colombia	18,8
55	Marruecos	12,1
57	Perú	11,7
67	India	7,1
72	Nigeria	5,4
80	Mozambique	4,0
85	Uganda	3,0
90	Chad	2,3

Fuente: Penn World Tables (2006)

7.3 La acumulación de capital

Vamos a modelizar el fenómeno del crecimiento económico usando una estructura muy simple. En concreto vamos a utilizar el esquema propuesto por Solow y Swan de suponer que la tasa de ahorro es una variable exógena y constante. Obviamente, sabemos que esto no es cierto, ya que la tasa de ahorro se determina de forma endógena como consecuencia de la decisión de los agentes económicos. Sin embargo, esta simplificación nos va a ser útil para clarificar determinados conceptos en relación con el fenómeno que queremos estudiar. El suponer que la tasa de ahorro es una constante va a dar lugar a un modelo en el cual únicamente vamos a tener una variable endógena: el stock de capital. Por tanto, el equilibrio de esta economía vendría determinado por una sola ecuación dinámica, que nos indicaría como evoluciona el stock de capital a lo largo del tiempo.

Para ello, partimos de la siguiente función de producción:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \quad (7.4)$$

donde Y_t es el nivel de producción, K_t es el stock de capital, L_t es la cantidad de trabajo y $F(\cdot)$ es una función matemática que describe la tecnología existente que transforma factores productivos en producción de bienes y servicios. Suponemos que cumple las

condiciones de Inada y que existen rendimientos decrecientes para cada uno de los factores productivos.

En concreto, la función de producción que vamos a considerar es una función del tipo Cobb-Douglas, tal que:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (7.5)$$

donde α es el parámetro tecnológico asociado al capital y $1 - \alpha$ es el parámetro tecnológico asociado al factor productivo trabajo. La producción se divide entre consumo y ahorro:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (7.6)$$

La inversión se determina de forma exógena ya que suponemos que la tasa de ahorro de la economía está dada, tal que:

$$I_t = sY_t \quad (7.7)$$

donde s es la tasa de ahorro. Dado que consideramos que el ahorro (inversión) es exógeno, la ecuación de acumulación del capital la definimos como la diferencia entre lo que se ahorra y lo que se deprecia:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sY_t - \delta K_t \quad (7.8)$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital.

Nuestro objetivo fundamental es el de realizar comparaciones entre distintas economías en términos de su nivel de riqueza. Por tanto tenemos que considerar el tamaño de cada economía, que viene dado por su población. Vamos a suponer que toda la población constituye la mano de obra. En realidad, en lugar de estar hablando de renta per cápita estaríamos hablando de renta por población en edad de trabajar.

Vamos a reescribir la función de producción en términos per cápita (o por trabajador). Para ello lo que hacemos es multiplicar y dividir la función de producción por el número de trabajadores:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \frac{L_t}{L_t} \quad (7.9)$$

Operando obtenemos que:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = \frac{K_t^\alpha L_t^1 L_t^{-\alpha}}{L_t} = K_t^\alpha L_t^{-\alpha} = \frac{K_t^\alpha}{L_t^\alpha} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^\alpha \quad (7.10)$$

Vamos a definir las variables en términos per cápita con una letra minúscula, tal que el nivel de producción per cápita de la economía viene dado por

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \quad (7.11)$$

Por su parte, el stock de capital per cápita (por trabajador) vendría dado por:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \quad (7.12)$$

Sustituyendo estas definiciones en la expresión anterior, obtenemos la siguiente función de producción en términos per cápita:

$$y_t = k_t^\alpha \quad (7.13)$$

A esta función de producción se le denomina función de producción intensiva, ya que el nivel de producción per cápita únicamente viene dado en función de un único factor productivo, el stock de capital per cápita. En términos generales la función de producción intensiva vendría dada por:

$$y_t = f(k_t) \quad (7.14)$$

La representación gráfica de la anterior función de producción aparece en la figura 7.5. Como podemos observar su forma es creciente y cóncava, dado el supuesto de que los rendimientos respecto al capital y, por tanto, también respecto al capital per cápita son decrecientes.

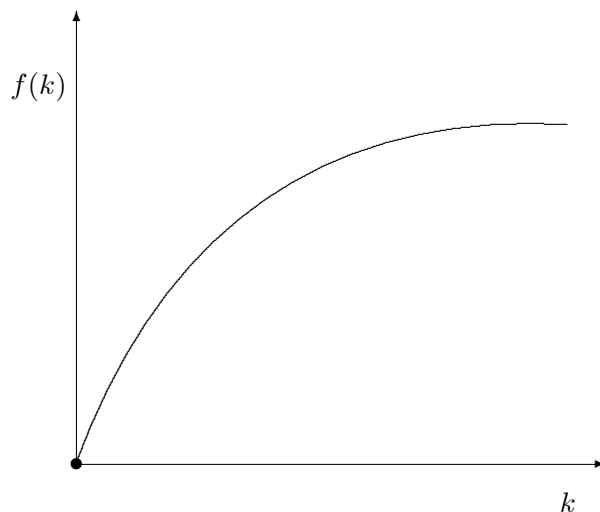


Figura 7.5. Función de producción intensiva en capital per cápita

Cuando hablamos de crecimiento económico lo que nos interesa fundamentalmente no es el nivel de producción per cápita, sino como este varía a lo largo del tiempo. Es decir, nos interesa la tasa de variación del nivel de producción, que es a lo que realmente llamamos crecimiento económico. De la expresión anterior se deduce que la tasa de variación del nivel de producción per cápita va a depender de como varíe el stock de capital per cápita. A su vez el stock de capital per cápita depende de como varíe el stock de capital agragado, así como de la variación en la cantidad de trabajo, o equivalentemente, de la población.

Consideramos el hecho de que la población no es constante, sino que aumenta con el tiempo:

$$n = \frac{\dot{L}_t}{L_t}; \quad n > 0 \quad (7.15)$$

donde n es la tasa de crecimiento de la población. Así, la población en un determinado momento del tiempo viene dada por:

$$N_t = N_0 e^{nt} \quad (7.16)$$

Crecimiento de la población exógeno. Sin embargo, en la realidad parece que el crecimiento de la población es endógeno.

Para calcular la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita, procedemos como sigue. En primer lugar definimos la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita como $\dot{k}_t/k_t$, que sería la diferencia entre la tasa de crecimiento del stock de capital agregado y la tasa de crecimiento de la población (dado que el stock de capital per cápita es el stock de capital agregado dividido la población)

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \quad (7.17)$$

A continuación sustituimos la expresión (7.8) resultando:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s_t Y_t - \delta K_t}{K_t} - n \quad (7.18)$$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s_t Y_t}{K_t} - \delta - n \quad (7.19)$$

Multiplicando y dividiendo por L_t obtenemos:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s_t Y_t / L_t}{K_t / L_t} - \delta - n \quad (7.20)$$

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s_t y_t}{k_t} - \delta - n \quad (7.21)$$

Operando, llegamos a la expresión final, que resulta en una ecuación diferencial que nos indica como cambia el stock de capital per cápita a lo largo del tiempo:

$$\dot{k}_t = s_t y_t - (\delta + n)k_t \quad (7.22)$$

Como podemos comprobar, la variación en el stock de capital per cápita depende positivamente del ahorro per cápita y negativamente de la depreciación del stock de capital per cápita, cuya tasa de depreciación viene dada por el término $\delta + n$.

7.3.1 El estado estacionario

El estado estacionario lo definimos como aquella situación en la cual las variables son constantes en el tiempo. En este caso únicamente tenemos una variable endógena, el stock de capital per cápita. Por tanto el estado estacionario vendrá definido por aquella situación en

la cual la ecuación que determina el movimiento de esta variable a lo largo del tiempo es igual a cero:

$$\dot{k}_t = s_t y_t - (\delta + n)k_t = 0 \quad (7.23)$$

Despejando, obtenemos que la condición de equilibrio viene dada por:

$$s_t f(\bar{k}_t) = (\delta + n)\bar{k}_t \quad (7.24)$$

donde $s f(k_t)$ es el ahorro o inversión bruta por trabajador y donde $(\delta + n)$ es la tasa de depreciación efectiva del stock de capital por unidad de capital por trabajador. Es decir, el stock de capital per cápita será constante cuando el volumen de ahorro por unidad de capital per cápita sea igual a las pérdidas de capital per cápita por depreciación efectiva.

Vamos a analizar un ejemplo concreto. Si suponemos la función de producción es del tipo Cobb-Douglas, resulta que el estado estacionario vendría dado por:

$$s_t \bar{k}_t^\alpha = (\delta + n)\bar{k}_t \quad (7.25)$$

Despejando el stock de capital per cápita obtenemos que:

$$\bar{k}_t^{\alpha-1} = \frac{\delta + n}{s} \quad (7.26)$$

siendo el stock de capital per cápita de estado estacionario:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{\delta + n}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (7.27)$$

A partir del resultado anterior el stock de capital en estado estacionario puede describirse como una función tal que:

$$\bar{k}_t = \bar{k}(s, n, \delta) \quad (7.28)$$

Dada la función obtenida anteriormente de stock de capital en estado estacionario, obtenemos los siguientes resultados:

- El stock de capital per cápita depende positivamente de la tasa de ahorro. Cuanto mayor sea la tasa de ahorro de una economía mayor será su nivel de stock de capital per cápita.

- Depende negativamente de la tasa de crecimiento de la población. Cuanto mayor sea el crecimiento de la población, o más exactamente, de la fuerza laboral, mayor es la necesidad de capital de la economía para ser utilizado por cada trabajador.
- Depende negativamente de la tasa de depreciación física del capital. Cuanto mayor es la tasa de depreciación física del capital, menor será la dotación del mismo.

A continuación vamos a realizar una representación gráfica del análisis realizado anteriormente. Para ello vamos a representar conjuntamente tres funciones: la función de producción de la economía en términos del stock de capital per cápita, la función de ahorro y la función de depreciación. Estas tres funciones son las siguientes:

$$y_t = f(k_t) \quad (7.29)$$

$$sy_t = sf(k_t) \quad (7.30)$$

$$(\delta + n)k_t \quad (7.31)$$

La representación gráfica de las tres funciones anteriores aparece en la figura 7.6. En primer lugar, la función de producción es creciente y cóncava, tal y como hemos comentado anteriormente. En segundo lugar, la función de ahorro es simplemente una proporción de la función de producción, donde dicha proporción viene dada por la tasa de ahorro, s . Por tanto, si la función de producción es cóncava, la función de ahorro también va a ser cóncava. Finalmente, la función de depreciación es simplemente una proporción del stock de capital per cápita, donde dicha proporción es $\delta + n$. Por tanto, va a ser una línea recta. Esto implica que en algún nivel de stock de capital per cápita, la función de depreciación va a cortar tanto a la función de producción como a la función de ahorro.

En términos gráficos el estado estacionario vendría dado por el punto en el cual la función de ahorro corta a la función de depreciación. tal y como establece la condición (7.22). Este punto de corte va a definir cual es el stock de capital per cápita de estado estacionario. Una vez determinado el stock de capital de estado estacionario podemos determinar el nivel de producción de estado

estacionario de la economía, y que parte se destina al consumo y que parte al ahorro.

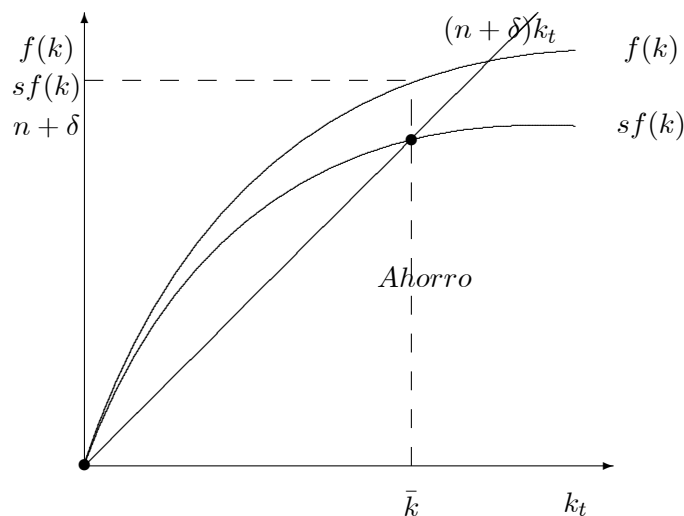


Figura 7.6. Estado estacionario

Un sencillo ejercicio numérico sería el siguiente. Supongamos que la tasa de ahorro de la economía es del 20% ($s = 0,2$), que la tasa de crecimiento de la población es del 2% ($n = 0,02$), la tasa de depreciación del 6% ($\delta = 0,06$) y el parámetro tecnológico asociado al stock de capital per cápita es de 0,3 ($\alpha = 0,3$). Con estos valores resulta que la ecuación de acumulación de capital es:

$$\dot{k}_t = 0,2k_t^{0,3} - (0,06 + 0,02)k_t \quad (7.32)$$

Igualando a cero la anterior expresión obtenemos que el stock de capital per cápita de estado estacionario es:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{\delta + n}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{0,08}{0,2} \right)^{\frac{1}{-0,7}} = 3,70 \quad (7.33)$$

Por tanto, en estado estacionario tendríamos que el nivel de producción per cápita y el consumo per cápita serían:

$$\bar{y}_t = \bar{k}_t^\alpha = 3,70^{0,3} = 1,48 \quad (7.34)$$

$$\bar{c}_t = (1 - s)\bar{y}_t = 0,8 \times 1,48 = 1,18 \quad (7.35)$$

Como podemos comprobar el ahorro per cápita de la economía sería de 0,3, que es exactamente igual a la cantidad de capital per cápita que se pierde ($0,08 \times 3,7 = 0,3$), por lo que el stock de capital per cápita permanece constante.

7.3.2 La regla de oro de la acumulación de capital

En esta sección vamos a introducir un elemento de optimización, a través de la denominada Regla de Oro. El análisis realizado anteriormente está basado en la existencia de una tasa de ahorro exógena, que suponemos viene dada. Esto significa que el resultado obtenido no considera ningún criterio maximizador. Esto es debido a que el análisis realizado se ha construido en un entorno excesivamente simplificado no teniendo en cuenta que el ahorro se determina como una decisión de los agentes económicos en términos de su decisión óptima de consumo.

A continuación vamos a utilizar el análisis anterior para determinar cuál es la tasa de ahorro óptima en estado estacionario, que va a ser aquella que da lugar al mayor nivel de consumo per cápita. A este resultado es lo que se llama la regla de oro. El consumo máximo, que definimos como el consumo oro lo podemos definir como:

$$c_t^{oro} = f(k_t^{oro}) - s_t^{oro} f(k_t^{oro}) \quad (7.36)$$

Aplicando la condición de estado estacionario tendríamos que:

$$c_t^{oro} = f(k_t^{oro}) - (n + \delta)k_t^{oro} \quad (7.37)$$

Para obtener la condición de la regla de oro únicamente tenemos que derivar la expresión anterior respecto a la tasa de ahorro e igualar a cero:

$$\frac{\partial c_t}{\partial s_t} = [f_k(k_t^{oro}(s, n, \delta)) - (n + \delta)] \frac{\partial k_t^{oro}(s, n, \delta)}{\partial s} = 0 \quad (7.38)$$

Como podemos observar para que la anterior expresión sea igual a cero únicamente necesitamos que el término dentro del corchete sea nulo, es decir:

$$f_k(k_t^{oro}(s, n, \delta)) = (n + \delta) \quad (7.39)$$

El término de la izquierda es la productividad marginal del capital per cápita en la regla de oro. El término de la derecha es la tasa de depreciación efectiva del stock de capital per cápita. Por tanto, la regla de oro viene dada por aquella situación en la cual la pendiente de la función de producción es igual a la pendiente de la función de depreciación.

A este resultado también se le denomina la regla del tipo de interés biológico. Esto es así porque la productividad marginal del capital es igual a la rentabilidad del mismo, es decir, es el tipo de interés. De la expresión anterior obtenemos que dicho tipo de interés, en el óptimo, tiene que ser igual a la tasa de depreciación total de la economía, que es la suma de la tasa de depreciación física del capital y de la tasa de crecimiento de la población. En suma, la maximización del bienestar de una sociedad depende de la tasa de crecimiento de la población, resultado que le da nombre a esta regla.

Las siguientes figuras muestran tres economías con diferentes tasas de ahorro. En primer lugar presentamos una economía con una tasa de ahorro s_1 , que implica un elevado stock de capital, pero también hace falta un volumen de ahorro significativamente elevado en el estado estacionario. Estaríamos en una situación en la cual la economía ha acumulado excesivamente capital y ahora tiene que destinar una gran cantidad de la producción a mantener dicho capital.

Por el contrario la figura 7.8 muestra una economía con una tasa de ahorro s_2 , que es demasiado baja. El volumen de ahorro en estado estacionario es ahora muy reducido, pero también lo es el stock de capital per cápita y, por tanto, el nivel de producción per cápita.

Tal y como hemos obtenido anteriormente, el consumo máximo (y por tanto, la tasa de ahorro óptima) se alcanzaría cuando el estado estacionario sea tal que la pendiente de la función de depreciación coincida con la pendiente de la función de producción. Esta situación es la que aparece representada en la figura 7.9.

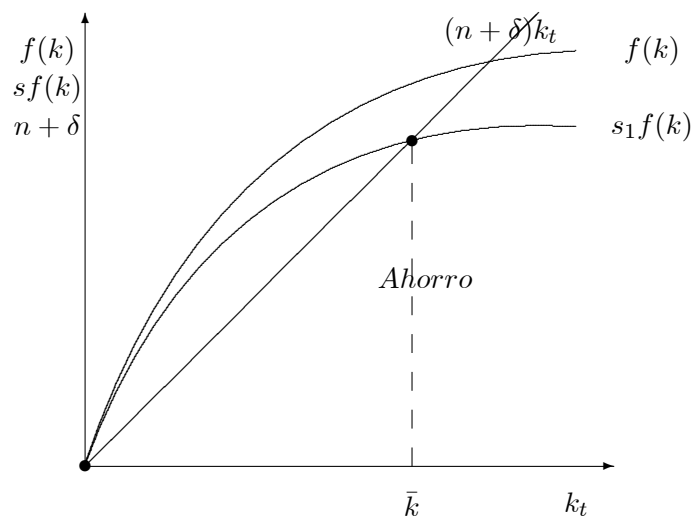


Figura 7.7. Tasa de ahorro demasiado elevada

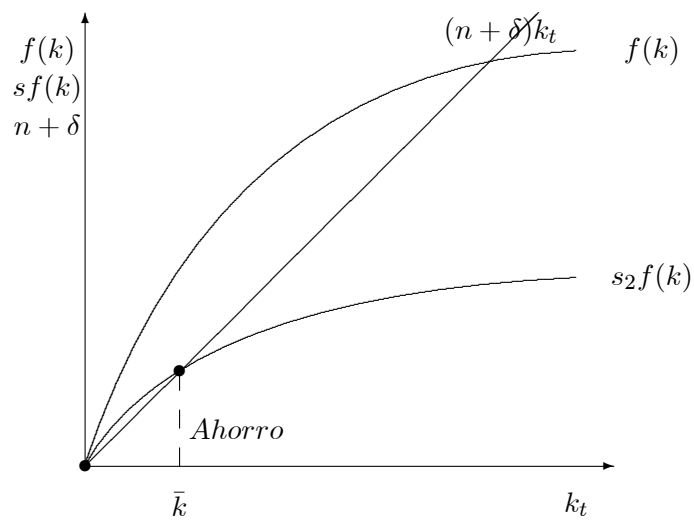


Figura 7.8. Tasa de ahorro demasiado baja

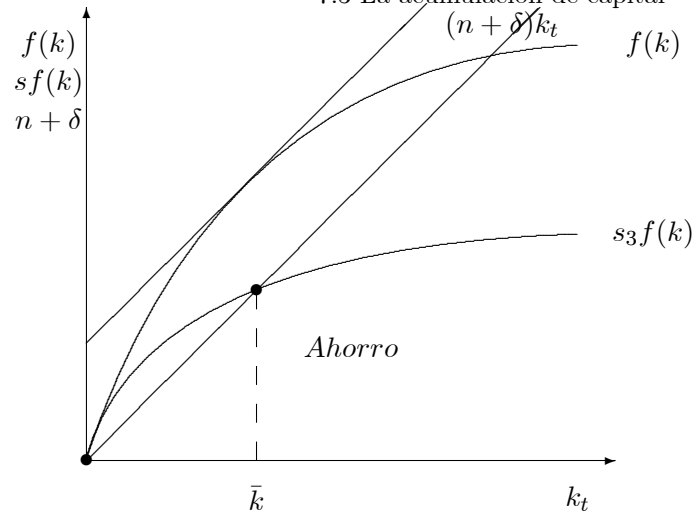


Figura 7.9. Tasa de ahorro oro (óptima)

Del análisis realizado anteriormente deducimos que sólo existe una tasa de ahorro óptima, tal que el consumo sea el máximo posible. Como muestra la figura 7.10, La relación entre el consumo per cápita de una economía y su tasa de ahorro tiene forma de campana, de forma que sólo existe una tasa de ahorro que maximiza el nivel de consumo per cápita. En efecto, tal y como hemos visto antes, si la tasa de ahorro de una economía es excesivamente baja, entonces su stock de capital es bajo y su producción es baja. Como consecuencia, el nivel de consumo también va a ser bajo. En este caso es posible mejorar el nivel de consumo aumentando la tasa de ahorro y generando mayor capital y, por tanto, mayor producción.

Por el contrario, si una economía tiene una tasa de ahorro muy elevada, el capital y la producción también serán muy elevadas, pero al mismo tiempo también hará falta una gran cantidad de inversión de reposición, es decir, inversión destinada a cubrir el stock de capital que se pierde periodo a periodo por la depreciación. En este caso habría que destinar una cantidad muy elevada de la producción simplemente a reponer el capital que se deprecia, por lo que el consumo también sería muy pequeño.

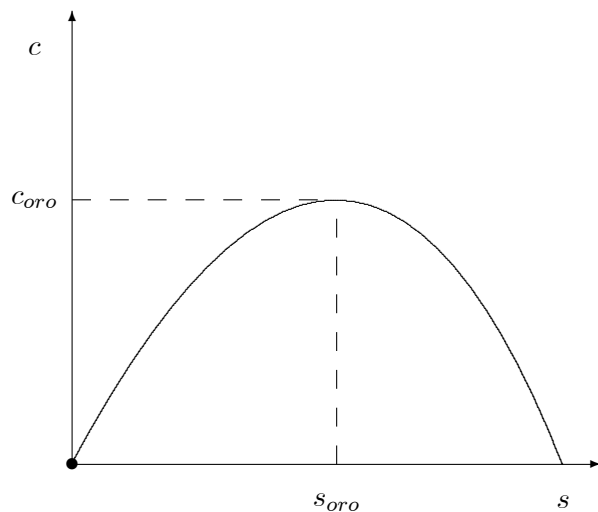


Figura 7.10. Relación entre la tasa de ahorro y el consumo.

7.4 La tasa de crecimiento de la economía

Vamos a repetir el análisis anterior pero en términos de tasa de crecimiento. Para ello únicamente tenemos que dividir la ecuación fundamental de acumulación de capital per cápita entre el stock de capital per cápita:

$$g_k = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s_t f(k_t)}{k_t} - (\delta + n) \quad (7.40)$$

donde $\frac{s_t f(k_t)}{k_t}$ es el ahorro por unidad de capital per cápita y $\delta + n$ es la tasa de depreciación efectiva. En este caso el estado estacionario se define como aquel stock de capital per cápita al que la tasa de crecimiento del mismo es cero, $g_k = 0$.

La representación gráfica de la tasa de crecimiento de la economía aparece en la figura 7.11. Para ello únicamente tenemos que representar la función de ahorro por unidad de capital per cápita, que tiene pendiente negativa, y la tasa de depreciación, que es una constante. El punto donde se crucen ambas funciones corresponde al estado estacionario en la cual la tasa de crecimiento del capital es cero. Puntos situados a la izquierda del estado estacionario se

corresponden a una tasa de crecimiento positiva, mientras que los puntos situados a la derecha del estado estacionario irían asociados a una tasa de crecimiento negativa. A través de esta representación gráfica podemos realizar diferentes análisis con el objetivo de estudiar el efecto de diferentes perturbaciones sobre la tasa de crecimiento de una economía.

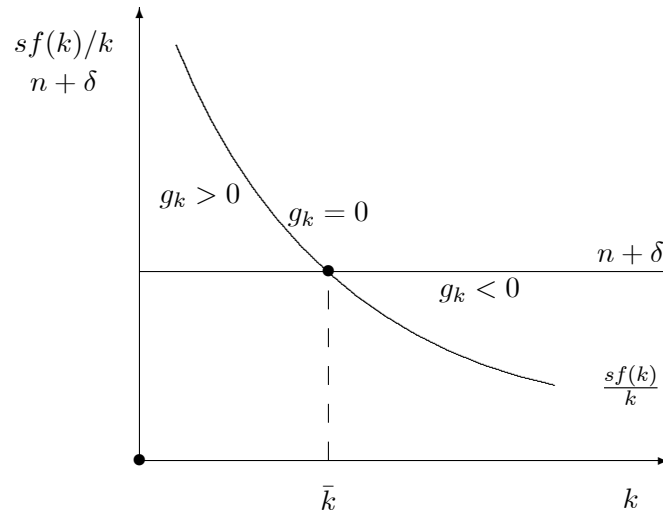


Figura 7.11. Tasa de crecimiento

A partir del análisis anterior ya podemos ofrecer una primer respuesta a nuestra primera pregunta de por qué crecen las economías. Según este análisis simple, las economías crecen porque aún no han alcanzado su estado estacionario. Es decir, estamos a la izquierda del estado estacionario en una senda de acumulación de capital y, por tanto, mostrando una tasa de crecimiento positiva.

Por otra parte, también podemos utilizar el análisis anterior para responder a la segunda pregunta de por qué unos países tienen una mayor tasa de crecimiento que otros. Si consideramos dos países y suponemos que las variables que definen el estado estacionario son las mismas para dos países. En este caso su tasa de crecimiento dependerá de cuanto de lejos esté cada uno de ellos respecto al estado estacionario. El país más alejado, es decir, el más pobre, tendrá una tasa de crecimiento más elevada mientras que el país más rico y más cercano al estado estacionario tendrá una tasa de crecimiento

más reducida. Este efecto se deriva de la existencia de rendimientos decrecientes respecto al capital. Los países más pobres tienen un menor nivel de capital per cápita, por lo que su productividad es mayor respecto a otra economía con un elevado nivel de capital per cápita.

En resumen, del análisis anteriores obtenemos las siguientes conclusiones:

- Los países crecen porque están a la izquierda del estado estacionario. Aún están en una dinámica de acumulación de capital y, por tanto, en una trayectoria hacia el estado estacionario.
- El país más pobre crecerá a tasas más elevadas que el país rico. Esto se debe a que el rendimiento del capital será menor en el país con mayor stock de capital.
- A largo plazo, si ambos países tienen el mismo estado estacionario, ambos tendrán el mismo nivel de stock de capital per cápita. Esto se debe a que el modelo predice convergencia hacia el estado estacionario.

7.4.1 *La convergencia*

Un concepto de gran importancia cuando hablamos del fenómeno del crecimiento económico es el de la convergencia. Por convergencia nos referimos a la reducción de las diferencias en términos de renta per cápita entre dos economías. Así, si tenemos un país rico y un país pobre hacemos referencia a la existencia de un proceso de convergencia cuando las diferencias entre ambas economías se reducen progresivamente en el tiempo, principalmente debido a que el país pobre va aumentando su nivel de renta per cápita respecto al país rico.

En la práctica tenemos dos conceptos de convergencia que tienen implicaciones muy diferentes: convergencia absoluta y convergencia relativa.

- **Convergencia absoluta:** Dos economías con diferente renta inicial finalizan con el mismo nivel de renta per cápita (estados estacionarios iguales).

- **Convergencia relativa o condicional:** Cuando tenemos dos economías con estados estacionarios diferentes. Cada economía converge hacia su propio estado estacionario.

Supongamos dos economías que tienen el mismo estado estacionario pero una economía es más pobre. Si representamos gráficamente esta situación observamos que las tasas de crecimiento que mostrarían ambas economías serían diferentes. Así, el país pobre tendría una tasa de crecimiento mayor que la del país rico. Esto significa que las diferencias se van a ir corrigiendo con el paso del tiempo. La diferencia en términos de renta per cápita de ambas economías va a ser cada vez más reducida, hasta que ambas economías alcancen el estado estacionario, momento en el cual las diferencias habrán desaparecido. A esto es a lo que denominamos convergencia absoluta.

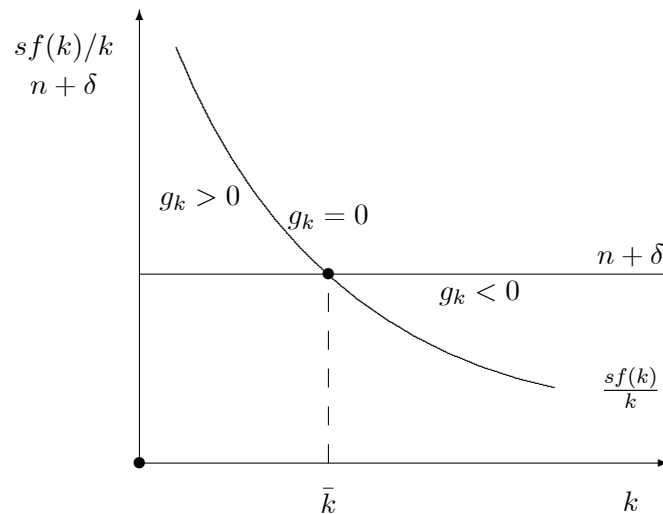


Figura 7.12. Convergencia absoluta

A nivel empírico se usan dos conceptos de convergencia: β -convergencia y σ -convergencia. El concepto de β -convergencia hace referencia al hecho de que si calculamos la relación entre el nivel de renta per cápita de cada economía en un momento inicial de tiempo y su tasa de crecimiento dicha relación tiene que ser negativa. El concepto de σ -convergencia hace referencia a la evolución a lo largo del tiempo de la desviación estándar de la renta per cápita

de un conjunto de economías. Si existe convergencia la dispersión disminuiría a lo largo del tiempo.

El análisis de la convergencia ha tenido una gran repercusión a nivel empírico con una gran cantidad de estudios sobre este aspecto del crecimiento económico. Los principales resultados obtenidos son los siguientes: Si analizamos la evolución de las diferentes regiones de un mismo país (en el cual podemos aceptar el supuesto de que los estados estacionarios son iguales), resulta que se aprecia el fenómeno de la convergencia en términos absolutos. Esto es lo que sucede si se analizan países como Estados Unidos o Japón. No obstante esto no es cierto para otros países como el caso de España, en la cual por ejemplo Andalucía tiene un nivel de renta per cápita muy inferior respecto a las regiones más ricas y dicha diferencia no parece disminuir en el tiempo. Por otra parte, cuando se analiza la evolución del nivel de renta per cápita de los países desarrollados, aparece el fenómeno de la convergencia. Por último, si analizamos todos los países del mundo de forma conjunta, incluyendo a África, el fenómeno que aparece es el contrario. Lejos de reducirse las diferencias en términos de renta per cápita entre países, estas diferencias han aumentado con el paso del tiempo.

7.5 El progreso tecnológico

En esta sección vamos a introducir un nuevo elemento en nuestro análisis: el progreso tecnológico. Una característica que muestra la sociedad es que los conocimientos aumentan con el paso del tiempo. Estos conocimientos terminan aplicándose a los procesos productivos, generando lo que denominamos progreso tecnológico, que va a tener importantes repercusiones sobre el desarrollo tecnológico. Cuando hablamos de tecnología consideramos dicho término en términos generales, como el fondo social de conocimientos sobre las artes productivas.

El progreso tecnológico va a tener importantes consecuencias sobre el fenómeno del crecimiento económico. Históricamente siempre ha existido progreso tecnológico de forma más o menos continuado en el tiempo. Esto nos ha permitido avanzar en las técnicas productivas, lo que ha permitido aumentar nuestro nivel de producción a la vez que producir nuevos bienes y servicios. La tecnología surge a partir de los procesos de I+D, que van desde una simple idea de un individuo

a un proceso de innovación colectivo de una sociedad. Así, el fuego, la rueda o la cerveza son innovaciones tecnológicas de primer orden, pero que seguramente han surgido de una idea de un individuo que era excepcional. Por el contrario la bomba atómica surge como una innovación producida a través de un largo proceso de investigación en el cual han estado implicados numerosos individuos y como un proceso derivado de la decisión de una sociedad de alcanzar dicha innovación. Esto significa que una parte del progreso tecnológico viene determinada por la decisión de los agentes y por la cantidad de recursos que se invierten en el mismo. No obstante, en nuestro análisis vamos a considerar el progreso tecnológico como un factor exógeno.

La importancia del progreso tecnológico en nuestro análisis se deriva del hecho de que simplemente a través de la acumulación de stock de capital no podemos explicar el aumento continuo en el nivel de producción por trabajador. En efecto, el nivel de producción por trabajador ha ido aumentando de forma continua en el tiempo, mucho más de lo que ha aumentado el stock de capital por trabajador. Esto significa que hay otros elementos que explican este importante aumento en el nivel de producción per cápita. Entre estos elementos adicionales se sitúa el desarrollo tecnológico aplicado a los procesos productivos.

El stock tecnológico de una economía lo vamos a definir como A_t , representando el nivel de conocimientos sobre como producir en el momento t . Por tanto, el progreso tecnológico podemos definirlo la tasa de crecimiento de dicho stock de conocimientos, $g_A > 0$, que suponemos siempre positiva.

$$g_A = \frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

Por tanto, el nivel de tecnología en un momento dado del tiempo lo podemos definir como:

$$A_t = e^{g_A t}$$

Vamos a incorporar la tecnología a la función de producción de la economía. Esto lo podemos hacer de tres formas:

1. Progreso tecnológico ahorrador de capital: En este caso suponemos que el progreso tecnológico va incorporado en el

capital, por lo que la función de producción sería:

$$Y_t = F(A_t K_t, L_t)$$

2. Progreso tecnológico ahorrador de mano de obra: En este caso el progreso tecnológico va incorporado en el factor productivo trabajo, por lo que la función de producción la definimos como:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

3. Progreso tecnológico neutral: El progreso tecnológico afecta tanto al factor productivo capital como al factor productivo trabajo, siendo la función de producción.

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t)$$

Si introducimos la tecnología como un proceso neutral, a la variable que representa el stock tecnológico, A_t , la denominamos Productividad Total de los Factores, ya que estaría representando la productividad agregada de la economía en términos de la combinación de factores que se usan en la producción. Esta es precisamente la forma funcional que habitualmente utilizamos en el modelo de equilibrio general. Pero también podemos definir la función de producción considerando progreso tecnológico ahorrador de mano de obra (el primer tipo de tecnología, ahorradora de capital, tiene poco sentido en términos económicos).

Vamos a suponer en el análisis que realizaremos a continuación que el progreso tecnológico es ahorrador de mano de obra (aumentador de trabajo). Esto lo hacemos para poder definir de forma sencilla el estado estacionario. La función de producción en términos per cápita sería:

$$y_t = F(k_t, A_t) \quad (7.41)$$

Como la tecnología está aumentando (no es una constante) dicha función estaría desplazándose permanentemente. Ahora si definimos el stock de capital en estado estacionario como una función de sus factores determinantes resultaría:

$$\bar{k}_t = \bar{k}(s, n, \delta, A_t) \quad (7.42)$$

que no sería constante sino que cada vez sería mayor debido a que el stock tecnológico está continuamente aumentando. Por tanto, ahora no existiría el estado estacionario.

En este caso no encontramos con que es más creíble la respuesta a porqué creen las economías. El stock de capital per cápita en estado estacionario no es una constante sino que cada vez es más elevado como consecuencia del desarrollo tecnológico. Esto significa que estamos en una situación de crecimiento permanente, ya que siempre estamos a la izquierda del estado estacionario y, por tanto, en un proceso de crecimiento del stock de capital per cápita. La otra implicación es que este fenómeno del crecimiento existirá mientras exista progreso tecnológico. Así, si consideramos que el desarrollo tecnológico va intrínsecamente unido al ser humano (nos da por pensar), el fenómeno del crecimiento económico no tendría fin.

Sin embargo, en términos teóricos no podemos trabajar con esta especificación ya que no existe el estado estacionario. En efecto, la tasa de crecimiento de nuestra economía sería siempre positiva

$$g_k = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s_t f(k_t, A_t)}{k_t} - (\delta + n) > 0 \quad (7.43)$$

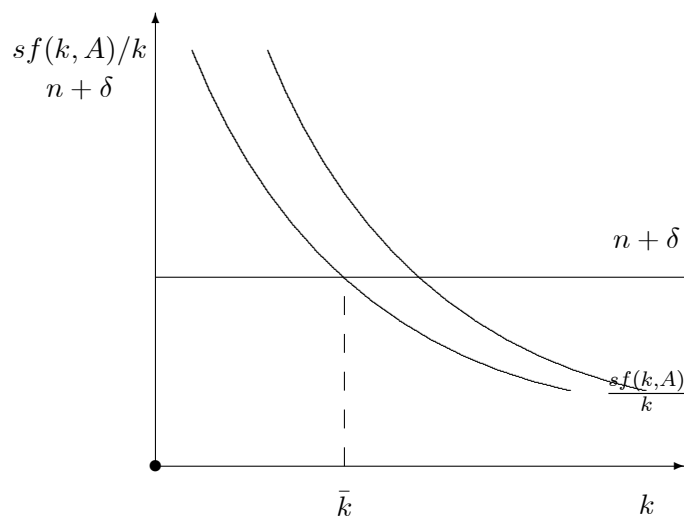


Figura 7.13. El progreso tecnológico

Para poder analizar el comportamiento de la economía tenemos que reformular nuestro modelo de forma que exista el estado estacionario, ya que es el punto de referencia que utilizamos para cualquier análisis que realicemos. Para ello vamos a reescribir

todas las variables en términos de unidades efectivas de trabajo, es decir, dividimos todas las variables por el término $A_t L_t$, donde este término representa el nivel de empleo de la economía multiplicado por el fondo de conocimientos tecnológicos incorporados en dicho factor productivo. Es decir, ahora los factores productivos de la economía serían el stock de capital físico y las unidades efectivas de trabajo. Redefiniendo las variables de nuestra economía en términos de unidades efectivas de trabajo tendríamos que el nivel de producción por unidad efectiva de trabajo y el stock de capital por unidad efectiva de trabajo vendrían dados por:

$$\hat{y}_t = \frac{y_t}{A_t} = \frac{Y_t}{A_t L_t}$$

$$\kappa_t = \frac{k_t}{A_t} = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

Por tanto tenemos que la función de producción per cápita sería ahora:

$$\hat{y}_t = f(\kappa_t)$$

En este caso si que podemos hablar de nuevo del estado estacionario, ya que hemos incorporado el desarrollo tecnológico. La ecuación de acumulación del stock de capital por unidad efectiva de trabajo vendría dada por la siguiente expresión:

$$\dot{\kappa}_t = sf(\kappa_t) - (\delta + n + g_A)\kappa_t$$

donde ahora existe un factor de depreciación adicional que viene dado por la tasa de desarrollo tecnológico. Es decir, cuanto mayor sea la tasa de desarrollo tecnológico menor es la cantidad de capital por unidad efectiva de trabajo. Esto es así, porque todas las variables las estamos definiendo en términos del progreso tecnológico.

El estado estacionario vendría dado por:

$$sf(\bar{\kappa}_t) = (\delta + n + g_A)\bar{\kappa}_t$$

y despejando el stock de capital por unidad efectiva de trabajo tendríamos:

$$\frac{f(\bar{\kappa}_t)}{\bar{\kappa}_t} = \frac{\delta + n + g_A}{s}$$

En términos de tasa de crecimiento podemos definir el crecimiento del stock de capital por unidad efectiva de trabajo como:

$$g_\kappa = \frac{sf(\kappa_t)}{\kappa_t} - (\delta + n + g_A)$$

La presentación gráfica de la economía con progreso tecnológico aparece en la figura 7.14. Si la tasa de crecimiento del stock de capital por unidad eficiente de trabajo es cero, $g_\kappa = 0$, entonces resulta que $g_\kappa = g_A$, es decir, la economía crecerá a la tasa a la que crezca la tecnología. Este resultado muestra que el desarrollo tecnológico es el principal motor del crecimiento económico.

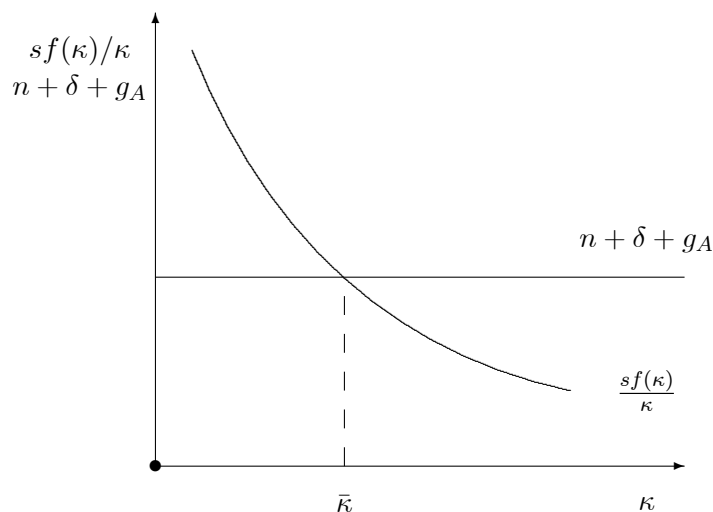


Figura 7.14. Estado estacionario con progreso tecnológico

Si suponemos que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas, tendríamos que:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$$

En términos de unidades eficientes de trabajo tendríamos que:

$$\hat{y}_t = \kappa_t^\alpha$$

por lo que la ecuación de acumulación del capital por unidad efectiva de trabajo es:

$$\dot{\kappa}_t = s\kappa_t^\alpha - (\delta + n + g_A)\kappa_t$$

Igualando a cero la anterior expresión y despejando el stock de capital por unidad efectiva de trabajo resultaría:

$$\bar{\kappa}_t = \left(\frac{\delta + n + g_A}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

7.6 Descomposición del crecimiento

La contabilidad del crecimiento descompone el crecimiento económico observado en términos de distintos componentes asociados a cambios en los factores productivos y al residuo de Solow, que refleja el progreso tecnológico y otros elementos. Este ejercicio de descomposición permite cuantificar la aportación de cada uno de estos componentes al crecimiento económico observado para una determinada economía lo cual va a ser útil para identificar las fuentes del crecimiento.

La principal utilidad de la contabilidad del crecimiento es calcular la productividad total de los factores de una economía como un residuo derivado de la función de producción. Así, la productividad total de los factores es una variable no observable estadísticamente, pero que resulta de gran importancia conocer puesto que sintetiza toda la información sobre el comportamiento de una economía. Por otra parte, también refleja el nivel tecnológico de dicha economía, otra variable que no puede observarse directamente en la realidad, así como su variación a lo largo del tiempo, que es a lo que llamamos el progreso tecnológico.

Partimos de la definición estándar de la función de producción de una economía:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t)$$

donde Y es el nivel de producción, A refleja el estado de la tecnología, K es el stock de capital y L es una medida de la cantidad de trabajo (horas trabajadas o trabajadores). La función de expresión anterior, puede ser descompuesta, en términos de su tasa de crecimiento, como la suma de un conjunto de factores asociados tanto a la variación de la cantidad de factores productivos como al progreso tecnológico.

En efecto, derivando la expresión anterior respecto al tiempo y expresándola en términos de tasas de crecimiento, obtenemos que:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{F_K(K_t, L_t)K_t}{Y_t} \frac{\dot{K}_t}{K_t} + \frac{F_L(K_t, L_t)L_t}{Y_t} \frac{\dot{L}_t}{L_t}$$

donde $\dot{X}_t = dX_t/dt$. La tasa de progreso tecnológico la definimos como:

$$g_{A,t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

Sin embargo, no observamos el crecimiento tecnológico de forma directa, ya que no disponemos de información estadística sobre este fenómeno si bien podemos calcularlo como un residuo, que es a lo que denominamos el residuo de Solow. Utilizando la expresión obtenida anteriormente resulta que:

$$g_{A,t} = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \frac{F_K(K_t, L_t)K_t}{Y_t} \frac{\dot{K}_t}{K_t} - \frac{F_L(K_t, L_t)L_t}{Y_t} \frac{\dot{L}_t}{L_t}$$

En la función de producción anterior, hemos utilizado los dos factores productivos a nivel agregado. Sin embargo es posible descomponer ambos factores productivos en diferentes clases para obtener una información más detallada de la aportación de cada tipo de factor al crecimiento económico. Así, por ejemplo, podemos desagregar el stock de capital total en diferentes activos de capital. Por otra parte, también podemos desagregar el factor trabajo en términos de la cualificación.

Si suponemos que el precio de los factores productivos es igual a su productividad entonces tendríamos que:

$$F_K(K_t, L_t) = R_t$$

$$F_L(K_t, L_t) = W_t$$

De este modo la expresión anterior podemos escribirla como:

$$g_{A,t} = g_{Y,t} - s_K g_{K,t} - s_L g_{L,t}$$

donde $g_{Y,t}$ es la tasa de crecimiento del nivel de producción, $g_{A,t}$ es la tasa de crecimiento de la tecnología, $g_{K,t}$ es la tasa de crecimiento

del stock de capital y $g_{L,t}$ es la tasa de crecimiento del número total de horas trabajadas, y donde:

$$s_K = \frac{R_t K_t}{Y_t}$$

$$s_L = \frac{W_t L_t}{Y_t}$$

es decir, la participación de las rentas de cada factor productivo sobre la renta total de la economía, tal que $s_K + s_L = 1$. Este resultado es consistente con la existencia de rendimientos constantes a escala. Si reescribimos la expresión anterior en términos per cápita, entonces tendríamos que:

$$g_{A,t} = g_{y,t} - s_K g_{k,t}$$

7.6.1 Función de producción Cobb-Douglas

Si la función de producción de la economía es del tipo Cobb-Douglas entonces:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Reescribiendo la anterior expresión en términos de tasas de crecimiento resulta:

$$g_{Y,t} = g_{A,t} + \alpha g_{K,t} + (1 - \alpha) g_{L,t}$$

Como podemos comprobar esta expresión es exactamente la misma que hemos obtenido anteriormente, siendo $s_K = \alpha$ y $s_L = 1 - \alpha$. En términos per cápita, la función de producción anterior quedaría como:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} = A_t \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^\alpha$$

o equivalentemente:

$$y_t = A_t k_t^\alpha$$

por lo que en términos de tasas de crecimiento tendríamos:

$$g_{y,t} = g_{A,t} + \alpha g_{k,t}$$

Alternativamente podemos escribir:

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t \left(\frac{K_t}{Y_t} \frac{Y_t}{L_t} \right)^\alpha$$

y despejando el nivel de producción per cápita resulta:

$$y_t = A_t^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{K_t}{Y_t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

donde ahora tendríamos expresado el nivel de producción per cápita de una economía en función de la tecnología y del stock de capital por unidad de producción. Esta expresión nos permite determinar el nivel de renta per cápita en función del ratio capital/producto, es decir, eliminando el impacto de la población (o del factor productivo trabajo) de la función de producción.

8

Crecimiento económico óptimo: El modelo de Ramsey

8.1. Introducción

8.2. Las familias

8.3. Las empresas

8.4. El equilibrio competitivo

8.5. Efectos de una alteración del deseo a ahorrar

8.1 Introducción

En este tema vamos a estudiar el fenómeno del crecimiento económico pero sin considerar las excesivas simplificaciones realizadas en el tema anterior. Así, ahora vamos a suponer que las variables macroeconómicas se derivan del comportamiento de los agentes económicos, por lo que vamos a utilizar la estructura de la economía tal y como la define el modelo básico de equilibrio general estudiado anteriormente. Para ello consideramos dos agentes: los consumidores y las empresas. De este modo se trata de un modelo de crecimiento óptimo donde el equilibrio surge como resultado de las decisiones de familias y empresas. Este modelo fue inicialmente

formulado por Ramsey en 1928, convirtiéndose en el punto de partida de los modelos macroeconómicos en la actualidad. En su versión original desarrollada por Ramsey, el modelo tenía como objetivo constatar a la pregunta de cuál era la tasa de ahorro óptima de una economía.

La idea es que la senda óptima de consumo se determina de forma simultánea al ahorro. Este ahorro se va a transformar en capital productivo, lo que va a determinar el nivel de producción en el futuro, que viene determinado por la decisión de la propia sociedad. Esto significa que es la propia sociedad la que va a determinar la senda de crecimiento de la economía a través de sus propias decisiones en términos de consumo-ahorro. Es decir, van a ser los individuos que conformen una determinada economía los que a través de sus decisiones de consumo-ahorro los que van a determinar su nivel de renta per cápita en cada momento del tiempo. Por este motivo, denominamos a este análisis crecimiento óptimo, ya que surge del comportamiento optimizador de los individuos.

La estructura del modelo es similar al modelo básico de equilibrio general estudiado anteriormente. Así, vamos a suponer la existencia de dos agentes: consumidores y empresas, que interactúan en un entorno competitivo. Los consumidores tienen como objetivo la maximización de la sumatoria descontada de su utilidad, mientras que el objetivo de la empresa es la maximización de beneficios.

Sin embargo, el análisis que vamos a realizar presenta algunas diferencias. En primer lugar, vamos a considerar la existencia de crecimiento de la población, ya que la dinámica demográfica es un elemento muy importante a tener en cuenta cuando estudiamos el fenómeno del crecimiento económico. Esto va a provocar que en lugar de consumidores hablemos más exactamente de familias, donde el número de miembros aumenta con el paso del tiempo. En segundo lugar, vamos a definir todas las variables en términos per cápita, ya que es la medida relevante en este contexto. El modelo está compuesto exclusivamente por consumidores y empresas. En tercer lugar, no vamos a considerar el ocio en la función de utilidad del individuo, sino que vamos a suponer que el factor productivo trabajo es igual a la población. Por último, vamos a considerar que el tiempo es continuo, por lo que tendríamos que resolver de nuevo el modelo de equilibrio general ya resuelto en tiempo discreto.

Vamos a representar el modelo anterior en términos del diagrama de fases. Esto significa que vamos a reducir el modelo a un sistema de dos ecuaciones diferenciales, una para el consumo per cápita y otra para el stock de capital per cápita. A partir de la representación de estas dos ecuaciones diferenciales podemos analizar los efectos sobre el comportamiento de la economía de diferentes perturbaciones.

La estructura de este tema es la siguiente. En primer lugar vamos a definir el problema que maximizan las familias, a partir del cual vamos a obtener la senda óptima de consumo, ya que al definir el problema en términos per cápita el empleo no entra en la función de utilidad. A continuación resolvemos el problema para las empresas, con la única diferencia de que también lo definimos en términos per cápita. A continuación, definimos el equilibrio competitivo de la economía, así como su representación gráfica en términos del diagrama de fases. Por último, realizamos un ejercicio de análisis de perturbaciones usando la estructura anterior, en concreto, estudiamos los efectos dinámicos de una disminución en la tasa de preferencia intertemporal que refleja un aumento en los deseos a ahorrar.

8.2 Las familias

Vamos a analizar el comportamiento de los consumidores a nivel agregado, pero en lugar de hablar de consumidores vamos a hablar de familias. En concreto, vamos a suponer que los individuos que habitan una economía forman parte de una misma familia. De este modo, los individuos pueden tener vida finita y morir en un determinado momento del tiempo, pero la familia es inmortal. El hecho de hablar de familia tiene importantes connotaciones desde el punto de vista económico, ya que estamos haciendo referencia a la existencia de una relación de parentesco entre los individuos que habitan en una economía, por lo que es de suponer que existan transferencias de renta intergeneracional de forma altruista. En otras palabras, los individuos de una generación se preocuparían también de los individuos de las generaciones futuras, lo que da lugar a que el agente de decisión, la familia, actúe como un agente con vida infinita.

Ahora la variable de referencia va a ser el nivel de consumo per cápita, dado que consideremos la existencia de crecimiento de la población. Por este motivo hablamos de familias en lugar de

individuos, donde la familia hace referencia a todos los individuos que vienen en la economía.

El tamaño de la población (suponiendo $L_0 = 1$) lo podemos definir como:

$$L_t = e^{nt} \quad (8.1)$$

donde n es la tasa de crecimiento de la población que suponemos es positiva ($n > 0$), que vendría dada por:

$$n = \frac{\dot{L}_t}{L_t} > 0 \quad (8.2)$$

Suponemos que la tasa de crecimiento de la población (tasa de natalidad menos tasa de mortalidad) es una constante exógena a la economía. Esto podría no ser cierto y ocurrir que la tasa de natalidad estuviese determinada también por la decisión de los individuos, lo que nos llevaría a tener que determinarla como una variable adicional del modelo.

Dado que vamos a utilizar este modelo para estudiar el fenómeno del crecimiento pero desde un punto de vista de optimización, vamos a redefinir todas las variables en términos per cápita. Definimos el consumo per cápita como:

$$c_t = \frac{C_t}{L_t} \quad (8.3)$$

A la hora de especificar el problema de los consumidores debemos tener en cuenta dos elementos dado que definimos las variables en términos per cápita. En primer lugar, los individuos descuentan el futuro, por lo que hemos de considerar la existencia de una tasa de preferencia intertemporal mayor que cero. En segundo lugar, hemos de tener en cuenta que el número de miembros de la unidad familiar no es constante en el tiempo, sino que aumenta a la tasa definida anteriormente. Esto significa que el problema va a consistir en maximizar la utilidad total de la unidad familiar, o lo que es lo mismo, el consumo per cápita.

Al introducir estas consideraciones hemos de imponer una condición adicional, y es que debe cumplirse que $\theta > n$, es decir, la tasa de preferencia intertemporal tiene que ser superior a la tasa de crecimiento de la población. Esto es así porque por un lado para obtener el consumo agregado, partimos del consumo de un individuo (el consumo per cápita) y multiplicamos por el número de individuos

que forman parte de nuestra economía. Por otra parte, estaríamos descontando las utilidades futuras en términos de la utilidad actual como en el problema básico del consumidor. Por tanto, la tasa de descuento resultante para la familia sería $n - \theta$. Dado que este factor de descuento tiene que ser positivo esto implic que tiene que suceder que $\theta > n$. Digamos que cuanto mayor sea la familia en el futuro mayor es la importancia que vamos a dar a la utilidad de los miembros de la familia en el momento actual. Nótese que en un contexto de economía planificada, en principio, θ tendría que ser cero.

El problema para las familias es el mismo que el definido anteriormente para el consumidor representativo. Su objetivo es la maximización (*max*) de la sumatoria ($\sum$ o $\int$) de las utilidades $U(C_t)$ en términos descontados ($(\frac{1}{1+\theta})^t = \beta^t$ o $e^{-\theta t}$). La función a maximizar por parte de la familia sería:

$$V = \int_0^{\infty} U(c_t) e^{nt} e^{-\theta t} dt \quad (8.4)$$

sujeta a la restricción presupuestaria:

$$\dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t \quad (8.5)$$

donde también todas las variables se definen en términos per cápita, tal que $b_t = B_t/L_t$ y $w_t = W_t/L_t$. Nótese que ahora aparece un nuevo componente en el problema a maximizar, e^{nt} , que representa a la población en cada momento del tiempo, dado que la función de utilidad de la familia la podemos definir como:

$$U(C_t) = U(c_t) e^{nt} = U(c_t) L_t$$

La restricción presupuestaria intertemporal del individuo se obtiene como sigue. En primer lugar, la cantidad de activos financieros que tiene un individuo en un determinado momento del tiempo la podemos definir como:

$$B_t = e^{R_t t} \left[\int_0^T B_{\tau} e^{-R_{\tau} \tau} d\tau + B_0 \right] \quad (8.6)$$

Si reescribimos la anterior expresión en términos per cápita (multiplicamos y dividimos por la población) tendríamos:

$$b_t = e^{-nt} e^{R_t t} \left[\int_0^T b_\tau e^{-R_t \tau} e^{-n\tau} d\tau + b_0 \right] \quad (8.7)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos que:

$$\dot{b}_t = \underbrace{(R_t - n) e^{-nt} e^{R_t t} \left[\int_0^T b_\tau e^{-R_t \tau} e^{-n\tau} d\tau + b_0 \right]}_{b_t} + e^{-nt} e^{R_t t} b_t e^{-R_t t} e^{-nt} \quad (8.8)$$

o lo que es lo mismo:

$$\dot{b}_t = (R_t - n)b_t + b_t = R_t b_t + w_t - c_t - nb_t \quad (8.9)$$

dado que periodo a periodo $b_t = w_t - c_t$.

Para resolver el problema de optimización anterior construimos el Hamiltoniano que viene dado por:

$$H = U(c_t) e^{(n-\theta)t} dt + \lambda_t [w_t + R_t b_t - c_t - nb_t] \quad (8.10)$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = U'(c_t) e^{(n-\theta)t} - \lambda_t = 0 \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_t} = -\dot{\lambda}_t = (R_t - n)\lambda_t \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - nb_t \quad (8.13)$$

Despejando de la primera condición de primer orden respecto al consumo resulta:

$$\lambda_t = U'(c_t) e^{(n-\theta)t} \quad (8.14)$$

mientras que su derivada respecto al tiempo sería:

$$\dot{\lambda}_t = U''(c_t) \dot{c}_t e^{(n-\theta)t} + (n - \theta) U'(c_t) e^{(n-\theta)t} \quad (8.15)$$

Sustituyendo en la segunda condición de primer orden obtenemos que:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -(R_t - n) = \frac{U''(c_t)\dot{c}_t e^{(n-\theta)t} + (n-\theta)U'(c_t)e^{(n-\theta)t}}{U'(c_t)e^{(n-\theta)t}} \quad (8.16)$$

por lo que la senda óptima de consumo viene definida por:

$$\frac{U''(c_t)\dot{c}_t}{U'(c_t)} = -(R_t - n) - (n - \theta) \quad (8.17)$$

Si multiplicamos y dividimos la anterior expresión por el consumo per cápita:

$$\frac{U''(c_t)\dot{c}_t}{U'(c_t)} \frac{c_t}{c_t} = -(R_t - \theta) \quad (8.18)$$

y definiendo el grado de curvatura de la función de utilidad como:

$$\Omega = -\frac{U''(c_t)c_t}{U'(c_t)} \quad (8.19)$$

obtenemos finalmente la condición de Keynes-Ramsey que nos indica la senda óptima de consumo:

$$\dot{c}_t = \frac{(R_t - \theta)}{\Omega} c_t \quad (8.20)$$

Como podemos apreciar, la expresión anterior es idéntica a la que obtendríamos que maximizar el problema del consumidor representativo, en la cual la senda óptima de consumo viene determinada por la diferencia entre el tipo de interés real y la tasa de preferencia intertemporal, en relación al grado de curvatura de la función de utilidad.

8.2.1 Función de utilidad logarítmica

Para obtener una solución explícita al anterior problema vamos a parametrizar las preferencias. En concreto, vamos a suponer que la función de utilidad es logarítmica, tal que:

$$U(c_t) = \ln c_t \quad (8.21)$$

El problema del consumidor consiste en resolver el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \ln c_t e^{(n-\theta)t} dt + \lambda_t [w_t + R_t b_t - c_t - n b_t] \quad (8.22)$$

Las condiciones de primer orden serían las siguientes:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} - \lambda_t = 0 \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -\dot{\lambda}_t = (R_t - n)\lambda_t \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t \quad (8.25)$$

De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} = \lambda_t \quad (8.26)$$

De la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -(R_t - n) \quad (8.27)$$

Sólo nos resta calcular la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. Una forma alternativa de hacerlo es, por ejemplo, tomando logaritmos, lo que resulta:

$$-\ln c_t + (n - \theta)t = \ln \lambda_t \quad (8.28)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$-\frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \quad (8.29)$$

Sustituyendo en la segunda condición de primer orden, resulta:

$$-\frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = -(R_t - n) \quad (8.30)$$

Despejando la derivada respecto al tiempo del consumo per cápita

$$-\frac{\dot{c}_t}{c_t} + (n - \theta) = -(R_t - n) \quad (8.31)$$

Operando

$$-\frac{\dot{c}_t}{c_t} - \theta = -R_t \quad (8.32)$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = R_t - \theta \quad (8.33)$$

$$\dot{c}_t = (R_t - \theta)c_t \quad (8.34)$$

que es exactamente la misma expresión que hemos obtenido anteriormente, dado que en este caso particular $\Omega = 1$, al ser la función de utilidad logarítmica.

8.3 Las empresas

A continuación vamos a analizar el comportamiento de las empresas. Dado que nuestras variables de interés vienen definidas en términos per cápita, y el problema del consumidor lo hemos analizado en dichos términos, también tenemos que definir el el problema de las empresas en términos per cápita. En términos generales la empresas maximizan beneficios sujetas a la restricción tecnológica:

$$\max \Pi_t = Y_t - W_t L_t - (R_t + \delta)K_t$$

donde la función de producción es:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

Como podemos observar los costes totales los hemos definido como los costes salariales más los costes del capital dentro de los cuales hemos incluido la depreciación física del capital. Sin embargo, tenemos que poner a todas las variables en términos per cápita para que sea compatible con el problema de las familias. El problema para las empresas en términos per cápita sería:

$$\max \pi_t = y_t - w_t - (R_t + \delta)k_t$$

siendo la función de producción intensiva en capital:

$$y_t = f(k_t)$$

Ahora las empresas maximizarían respecto al stock de capital per cápita que sería el único factor productivo considerado al ser una combinación de los dos factores productivos, capital y trabajo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = f_k(k_t) - (R_t + \delta) = 0$$

De la expresión anterior obtenemos que la productividad marginal del capital per cápita es igual al tipo de interés real más la taa de depreciación:

$$f_k(k_t) = R_t + \delta$$

El salario de equilibrio lo obtendríamos como la diferencia entre lo que se produce y la parte de producción que va destinada a retribuir al stock de capital per cápita:

$$w_t = f(k_t) - k_t f_k(k_t)$$

8.3.1 Función de producción Cobb-Douglas

En el caso en que la función de producción sea del tipo Cobb-Douglas tendríamos que el problema para las empresas en términos per cápita sería:

$$\max \pi_t = k_t^\alpha - w_t - (R_t + \delta)k_t$$

Ahora las empresas maximizarían respecto al stock de capital per cápita que sería el único factor productivo considerado al ser una combinación de los dos factores productivos, capital y trabajo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = \alpha k_t^{\alpha-1} - (R_t + \delta) = 0$$

De la expresión anterior obtenemos que la productividad marginal del capital per cápita es igual al tipo de interés real más la taa de depreciación:

$$\alpha k_t^{\alpha-1} = R_t + \delta$$

o lo que es lo mismo la retribución al capital es una proporción α de la producción:

$$(R_t + \delta)k_t = \alpha y_t$$

El salario de equilibrio lo obtendríamos como la diferencia entre lo que se produce y la parte de producción que va destinada a retribuir al stock de capital per cápita, tal y como lo hemos definido anteriormente, por lo que vendría dado por:

$$w_t = k_t^\alpha - k_t \alpha k_t^{\alpha-1} = k_t^\alpha - \alpha k_t^\alpha = (1 - \alpha)y_t$$

8.4 El equilibrio competitivo

El equilibrio competitivo viene dado por aquella situación en la cual los planes de los consumidores y de las empresas coinciden. Es decir, por aquella situación en la cual el stock de capital per cápita que quieren contratar las empresas es igual a la cantidad de activos financieros per cápita, tal que:

$$b_t = k_t \quad (8.35)$$

Para obtener el equilibrio del modelo anterior, hemos de sustituir el precio de los factores productivos en las expresiones que reflejan las decisiones óptimas de los consumidores. En este caso tendríamos que determinar el valor de dos variables endógenas: el consumo per cápita y el stock de capital per cápita. Una vez determinadas estas dos variables podemos determinar el nivel de producción per cápita y el ahorro per cápita.

Partimos de la ecuación dinámica para el consumo per cápita, que viene dada por la expresión:

$$\dot{c}_t = (R_t - \theta)c_t \quad (8.36)$$

Sustituyendo el valor de equilibrio para el tipo de interés resulta:

$$\dot{c}_t = (f_k(k_t) - \delta - \theta)c_t \quad (8.37)$$

Po otra parte, la ecuación dinámica para el stock de capital per cápita la obtenemos a partir de la restricción presupuestaria del individuo:

$$\dot{b}_t = w_t + R_t b_t - c_t - n b_t \quad (8.38)$$

Dado que en equilibrio $b_t = k_t$, resulta por tanto que la ecuación de acumulación de capital per cápita sería:

$$\dot{k}_t = w_t + R_t k_t - c_t - n k_t \quad (8.39)$$

Sustituyendo los valores de equilibrio para el tipo de interés y el salario:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - k_t f_k(k_t) + (f_k(k_t) - \delta)k_t - c_t - n k_t \quad (8.40)$$

y reordenando términos llegaríamos a:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - k_t f_k(k_t) + f_k(k_t)k_t - c_t - (n + \delta)k_t \quad (8.41)$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + \delta)k_t \quad (8.42)$$

Por tanto, el modelo quedaría reducido al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{c}_t = f_k(k_t) - \delta - \theta c_t$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n + \delta)k_t$$

donde la primera ecuación nos indicaría la dinámica del consumo per cápita y la segunda ecuación la dinámica del stock de capital per cápita.

8.4.1 El estado estacionario

El estado estacionario lo definimos como aquella situación en la cual todas las variables de la economía son constantes en el tiempo. Por tanto el estado estacionario vendría definido como:

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_t \\ \dot{k}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La condición de equilibrio dinámica para el consumo per cápita arroja como resultado que la productividad marginal del capital tiene que ser igual a una constante, dada por la suma de la tasa de depreciación física del capital y la tasa de preferencia intertemporal del individuo, tal que:

$$\dot{c}_t = 0 \implies f_k(\bar{k}_t) = \delta + \theta \quad (8.43)$$

A continuación vamos a representar gráficamente las dos condiciones de equilibrio dinámicas anteriores, junto con el signo de cada ecuación fuera del equilibrio. Vamos a representar el consumo per cápita en el eje vertical y al stock de capital per cápita en el eje horizontal. Comencemos por la ecuación del consumo per cápita. Si calculamos la pendiente de esta condición, obtenemos que su valor es infinito y, por tanto, siendo vertical.

$$\left. \frac{dc_t}{dk_t} \right|_{\dot{c}_t=0} = \frac{f_{kk}(k_t)}{0} = \infty \quad (8.44)$$

El resultado anterior viene motivado por el hecho de que el nivel de consumo per cápita no afecta a la dinámica del mismo y únicamente depende del stock de capital per cápita. En este sentido únicamente hay un nivel de capital per cápita tal que el consumo per cápita permanezca constante en el tiempo. La condición de equilibrio dinámica del consumo es vertical (el valor de equilibrio del consumo únicamente depende del stock de capital).

La figura 8.1 muestra la representación gráfica de la ecuación dinámica del consumo en equilibrio, que se corresponde con un único valor de stock de capital per cápita compatible con un consumo per cápita constante. Por otra parte también representamos el comportamiento del consumo fuera del equilibrio. Así, a la derecha de la condición de equilibrio dinámica parcial para el consumo per cápita, el stock de capital per cápita es muy elevado respecto al que debería existir en estado estacionario. Esto provoca que la productividad marginal del capital sea baja por lo que $f_k(k_t)$ será menor que $\delta + \theta$, es decir, la ecuación dinámica del consumo será negativa, por lo que el consumo per cápita disminuirá. Por el contrario, situaciones a la izquierda de la condición de equilibrio dinámica parcial del consumo indicarán una alta productividad marginal del capital per cápita, por lo que el consumo per cápita aumentará.

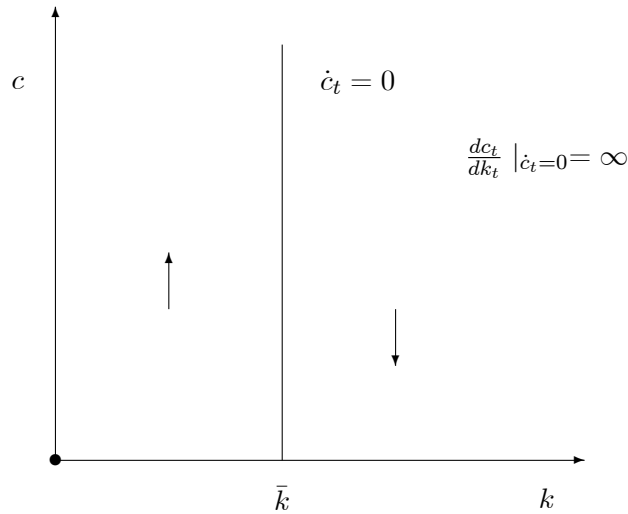


Figura 8.1. Dinámica del consumo per cápita

A continuación realizamos en mismo análisis respecto a la condición de equilibrio dinámica para el stock de capital per cápita. En equilibrio obtenemos que:

$$\dot{k}_t = 0 \implies f(\bar{k}_t) = \bar{c}_t + (n + \delta)\bar{k}_t \quad (8.45)$$

por lo que despejando, llegamos a que el consumo per cápita de estado estacionario podemos definirlo como una función del stock de capital per cápita:

$$\bar{c}_t = f(\bar{k}_t) - (n + \delta)\bar{k}_t \quad (8.46)$$

La pendiente de la condición de equilibrio parcial para el stock de capital per cápita sería:

$$\frac{dc_t}{dk_t} \Big|_{k_t=0} = f_k(k_t) - (n + \delta) \quad (8.47)$$

es decir, la pendiente de la condición de equilibrio dinámica del stock de capital es la diferencia entre la productividad marginal del capital (pendiente de la función de producción) y la tasa de depreciación efectiva (pendiente de la función de depreciación). Para su representación gráfica hemos de tener en cuenta que la primera función es cóncava, dado el supuesto de rendimientos decrecientes del capital, mientras que el segundo término es simplemente un número. Si presentamos gráficamente la función de producción y la función de depreciación observamos que estas se van a cortar obligatoriamente en dos puntos: para un stock de capital per cápita cero y para un stock de capital per cápita lo suficientemente elevado como para que la función de depreciación sea, a partir de ese punto, superior a la función de producción, dado que esta última es cóncava. Por tanto, la representación gráfica de esta condición de equilibrio dinámica parcial para el stock de capital per cápita tiene forma de U invertida, tal y como aparece en la figura 8.2.

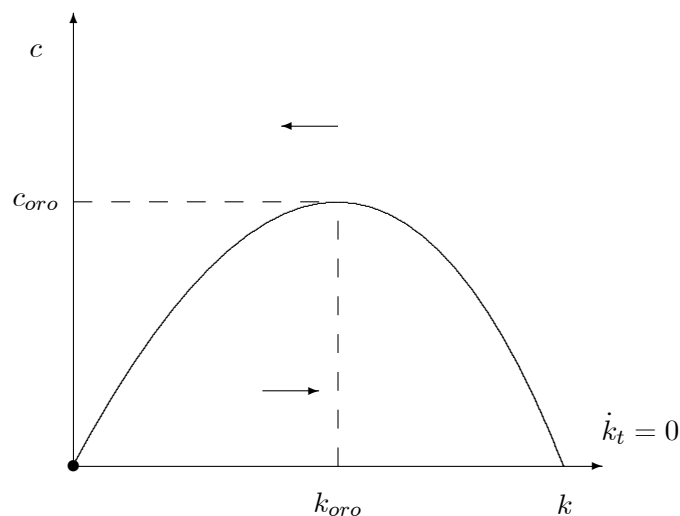


Figura 8.2 Dinámica del stock de capital per cápita

Fuera del equilibrio, el stock de capital per cápita se comporta de la siguiente manera. Por debajo de la condición de equilibrio dinámica parcial, el nivel de consumo es muy reducido respecto al que debería existir para que el stock de capital per cápita permaneciera constante. Dado que el signo asociado al consumo per cápita en esta ecuación es negativo, esto significa que la ecuación tendría signo positivo, es decir, el stock de capital per cápita aumentaría. Por el contrario, puntos situados por encima de esta condición de equilibrio dinámica irían asociados a un consumo per cápita muy elevado y, dado el signo negativo de éste, la ecuación tendría signo negativo, por lo que el stock de capital per cápita disminuiría.

8.4.2 El consumo de estado estacionario y la regla de oro

Para representar gráficamente nuestra economía, hemos de tener en cuenta una consideración adicional. En efecto, si simplemente representamos en un mismo gráfico ambas condiciones de equilibrio dinámicas el consumo de estado estacionario va a depender de cómo hagamos exactamente dicha representación gráfica. Así, dependiendo de cual sea el stock de capital per cápita de estado estacionario así será el nivel de consumo per cápita en el estado estacionario. Es decir, necesitamos alguna información adicional

para poder realizar la representación gráfica del modelo de Ramsey. Esta información adicional nos la va a proporcionar la regla de oro.

Vamos a comprobar que en el caso del modelo de Ramsey no se cumple la regla de oro tal y como la habíamos definido anteriormente bajo el supuesto de que la tasa de ahorro venía dada. Recordemos que la regla de oro indicaba el stock de capital per cápita que daba como resultado el mayor nivel de consumo per cápita. Esta condición implicaba que la productividad marginal del capital tenía que ser una constante igual a la suma de la tasa de crecimiento de la población y la tasa de depreciación física del capital:

$$f_k(k_t^{oro}) = n + \delta \quad (8.48)$$

Por otra parte, del análisis realizado anteriormente hemos obtenido que el stock de capital de estado estacionario para que el consumo per cápita sea constante:

$$f_k(\bar{k}_t) = \delta + \theta \quad (8.49)$$

Pero como resulta que tiene que cumplirse que $\theta > n$, entonces resulta que la productividad marginal del capital que existiría en la regla de oro tendría que ser inferior a la productividad marginal del capital en el estado estacionario:

$$f_k(k_t^{oro}) < f_k(\bar{k}_t) \quad (8.50)$$

Es decir, el stock de capital oro es superior al stock de capital per cápita en el modelo de Ramsey:

$$k_t^{oro} > \bar{k}_t \quad (8.51)$$

Dado que el stock de capital oro es el que se corresponde con el consumo máximo, el desarrollo realizado anteriormente nos indica que la condición de equilibrio dinámica del consumo tenemos que representarla a la izquierda del máximo de la condición de equilibrio dinámica parcial para el stock de capital per cápita, tal y como aparece en la figura 8.3. A esta condición se le denomina regla de oro modificada, dado que es el consumo per cápita máximo que se puede alcanzar en un entorno competitivo. Esto es así porque el objetivo de los consumidores es el de maximizar la utilidad no maximizar el consumo.

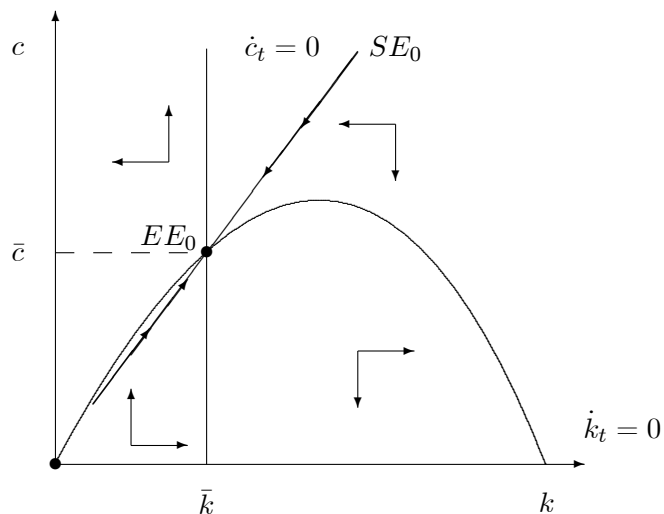


Figura 8.3. Representación gráfica del modelo de Ramsey

8.4.3 Ejemplo: Función de utilidad logarítmica y tecnología Cobb-Douglas

En el caso en que supongamos que la función de utilidad tiene forma logarítmica y que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas, el sistema de ecuaciones correspondiente sería:

$$\dot{c}_t = (\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta - \theta)c_t \quad (8.52)$$

$$\dot{k}_t = k_t^\alpha - c_t - (n + \delta)k_t \quad (8.53)$$

De la condición dinámica para el consumo per cápita podemos obtener el valor del stock de capital per cápita en estado estacionario, siendo:

$$\bar{k}_t = \left(\frac{\delta + \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (8.54)$$

Sustituyendo en la condición dinámica parcial para el stock de capital per cápita, obtenemos que el consumo per cápita en estado estacionario viene dado por:

$$\bar{c}_t = \bar{k}_t^\alpha - (n + \delta)\bar{k}_t \quad (8.55)$$

$$\bar{c}_t = \left(\frac{\delta + \theta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n + \delta) \left(\frac{\delta + \theta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (8.56)$$

8.5 Análisis de perturbación: Efectos de una alteración del deseo a ahorrar

Una vez hemos descrito los componentes del modelo de Ramsey y su representación gráfica, a continuación vamos a usar este modelo para realizar análisis de perturbaciones. En este caso, estudiamos el efecto de una perturbación sobre el crecimiento económico, en términos del nivel de consumo y capital per cápita. Sin embargo, con el modelo que hemos desarrollado, podemos extender fácilmente el análisis a la evolución del nivel de producción per cápita.

En concreto, vamos a estudiar cuáles son los efectos del aumento del deseo a ahorrar. Esta perturbación es equivalente a una disminución en la tasa de preferencia intertemporal. Como ya sabemos, cuanto menor sea la tasa de preferencia intertemporal mayor es la preocupación del individuo por el futuro, lo que le lleva a ahorrar más. Vamos a ilustrar la dinámica de la economía ante esta perturbación usando el diagrama de fases del modelo, que aparece en la figura 8.3. Para realizar el análisis partimos de la situación de estado estacionario.

Esta perturbación afecta a la condición de equilibrio dinámica del consumo per cápita.

$$\dot{c}_t = (f_k(k_t) - \delta - \theta)c_t = 0 \quad (8.57)$$

mientras que el parámetro de preferencia intertemporal no aparece en la condición de equilibrio dinámica para el stock de capital per cápita. Como podemos observar, el parámetro θ aparece en la expresión anterior con signo negativo. Esto significa que si θ disminuye, partiendo de la condición de equilibrio, la ecuación se hace positiva, por lo que la productividad marginal del capital que tiene signo positivo tendría que disminuir para compensar el efecto anterior y que la ecuación vuelva a ser cero. Dada la existencia de rendimientos decrecientes del capital, esto implica que el stock de capital per cápita tendría que aumentar, por lo que esta condición de equilibrio dinámica se desplaza hacia la derecha.

Por tanto, el nuevo estado estacionario, que determina los efectos a largo plazo está situado a la derecha y hacia arriba respecto al estado estacionario inicial, tal y como aparece reflejado en la figura 8.4. Como podemos observar, el efecto a largo plazo es que tanto el stock de capital per cápita como el consumo per cápita aumentarán respecto a la situación inicial. Esto es así porque al disminuir la tasa de preferencia intertemporal los agentes sustituyen consumo actual por consumo futuro. Al aumentar el ahorro, esto provoca una mayor acumulación de capital, lo que también influye sobre las posibilidades de producción en el futuro, lo que a su vez permitirá alcanzar un mayor nivel de consumo per cápita.

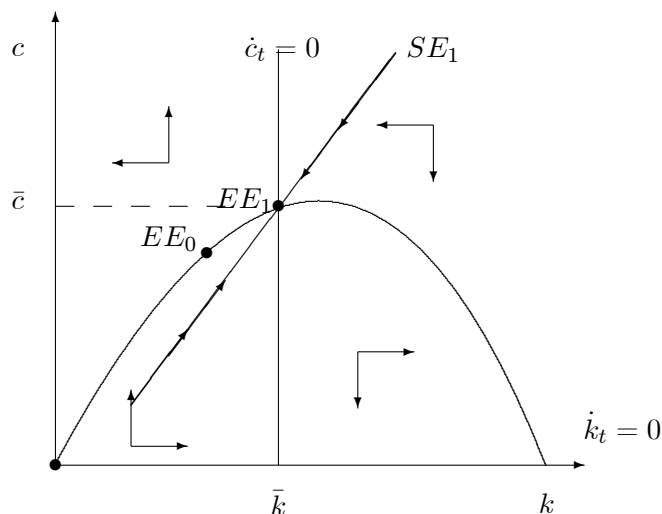


Figura 8.4. Efectos a largo plazo de una disminución en θ

El efecto a corto plazo de la perturbación anterior viene dado por el reajuste instantáneo del consumo per cápita. Dado que el consumo es una variable totalmente flexible, el aumento en el ahorro provoca un reajuste a la baja instantáneo en el consumo per cápita. Gráficamente este efecto viene representado en la figura 8.5 y consiste en una disminución del consumo hasta alcanzar la senda estable. A partir de este momento, el mayor ahorro se va a transformar en mayor capital, por lo que el stock de capital per cápita va aumentando de forma gradual. Al mismo tiempo que aumenta el stock de capital también aumenta el nivel de producción de la economía por lo que el

consumo también es mayor. En este caso estaríamos desplazándonos a lo largo de la senda estable. Este movimiento en ambas variables continuará hasta que alcancemos el nuevo estado estacionario.

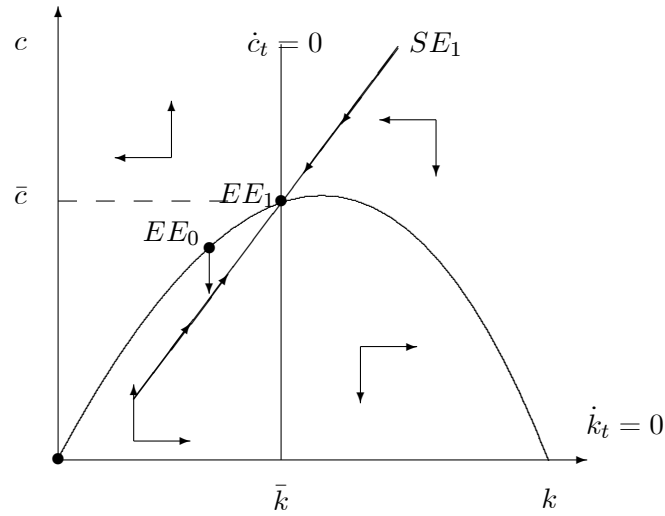


Figura 8.5. Efectos a corto plazo de una disminución en θ

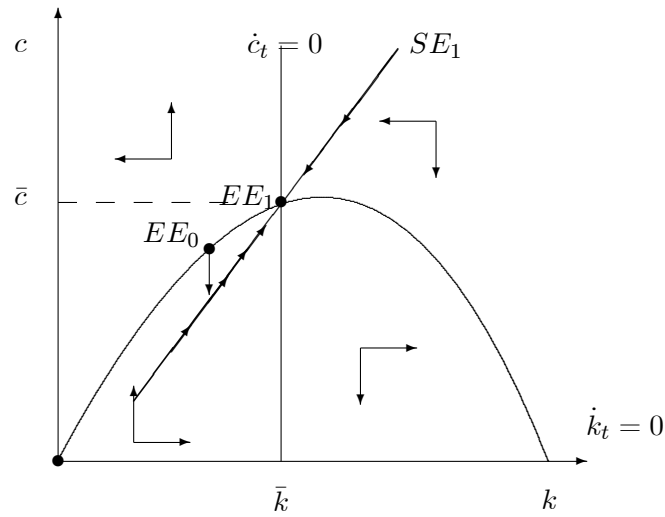


Figura 8.6. Efectos a corto, medio y largo plazo de una disminución en θ

9

La Tecnología AK

9.1. Introducción

9.2. La tecnología AK y el crecimiento económico

9.3. El modelo con rendimientos constantes del capital

9.1 Introducción

En este tema vamos a cambiar los supuestos acerca de la función de la tecnología y a estudiar sus implicaciones sobre el crecimiento económico. Anteriormente hemos supuesto que la función de producción presenta rendimientos decrecientes respecto a los factores productivos trabajo y capital. Esto daba lugar a que conforme una economía aumentaba su stock de capital, éste fuese menos productivo, lo que daba lugar a un estado estacionario con una tasa de crecimiento cero, o a un estado estacionario con una tasa de crecimiento constante y positiva bajo la existencia de progreso tecnológico.

Sin embargo, mientras que esto puede ser cierto a nivel de empresa, a nivel agregado pueden existir otros elementos ajenos a las unidades de producción que alteren significativamente los

rendimientos de los factores productivos. Así, mientras que el supuesto de rendimientos decrecientes de los factores productivos parece un supuesto coherente cuando hablamos de una única unidad de producción, cuando consideramos de forma conjunta muchas unidades de producción, existen otros elementos que pueden provocar que este tipo de rendimientos de los factores productivos sean diferentes. En concreto, a nivel agregado podemos encontrarnos con la existencia de situaciones donde los rendimientos del capital sean crecientes, lo que va a dar lugar a un entorno productivo muy diferente al estudiado anteriormente.

Pensemos por ejemplo en una empresa de transportes. Esta empresa contrata o compra dos tipos de factores productivos, por un lado camioneros (factor productivo trabajo) y por otro camiones (factor productivo capital). Sin embargo, en su función de producción entra otro tipo de factor productivo no incluido en las anteriores, como son las carreteras, que en este caso es un tipo de capital público. Es decir, en su proceso productivo no sólo está usando factores productivos privados, sino también factores productivos públicos, pero que le vienen dados sin que tenga que pagar directamente por su uso. Esto significa que el factor productivo total que usa la empresa está compuesto de dos activos de capital diferentes: camiones y carreteras. Esto significa que la productividad del capital vendrá dada por la suma de la productividad del capital privado y del capital público, por lo que podría ser superior a la unidad. En cualquier caso, la consideración de estos nuevos elementos provocarían que la función de producción ya no reflejase rendimientos constantes a escala, sino que en este caso los rendimientos a escala serían crecientes.

El supuesto acerca los rendimientos del capital son fundamentales a la hora de hablar de crecimiento económico ya que todos los resultados teóricos que se obtengan se derivan de este supuesto. Como comprobaremos a continuación, la dinámica de crecimiento de una economía es muy diferente según se cumpla el supuesto de que los rendimientos del capital son decrecientes. Por otra parte, también el efecto en el tiempo de una determinada perturbación va a ser diferente.

El objetivo de abandonar el supuesto de rendimientos decrecientes respecto al capital es el de explicar de forma endógena las fuentes del crecimiento económico, principalmente en lo que se refiere al progreso

tecnológico. En este sentido, existe una gran cantidad de elementos que pueden dar lugar a crecimiento endógeno, como las actividades de I+D, el capital humano, el capital público, el aprendizaje en la práctica, etc. Todos estos elementos conforman un amplio abanico de modelos de crecimiento endógeno, donde intentan explicar este fenómeno en función de cada uno de estos elementos.

9.2 La tecnología AK y el crecimiento económico

Los resultados obtenidos anteriormente respecto al crecimiento económico están condicionados al supuesto sobre como es la función tecnológica. En concreto, hemos supuesto que la función de producción presentaba rendimientos constantes a escala y, por tanto, rendimientos decrecientes respecto al trabajo y al capital. Esto iba a dar lugar a un crecimiento económico que se agota con el tiempo, dado que a medida que aumentamos la cantidad de factores productivos, su aportación a la producción es menor mientras hemos de dedicar una cantidad de recursos proporcional para mantener el stock de capital. Como consecuencia de estos factores el crecimiento económico únicamente depende del desarrollo tecnológico, que hemos supuesto exógeno. Por esta razón, a este tipo de modelos se les denomina modelos de crecimiento exógenos

El abandono de los supuestos anteriores va a dar lugar a la obtención de un proceso de crecimiento endógeno, donde todas las fuentes del crecimiento se determinan dentro de la economía. En este caso vamos a comprobar que el crecimiento económico puede ser positivo incluso en el estado estacionario. Por tanto, ahora el estado estacionario no vendría definido en términos de una tasa de crecimiento cero para las variables de la economía, sino que éstas crecerían a una tasa constante. Esto es a lo que se denomina la senda de crecimiento equilibrado.

Para ello, el primer paso que vamos a dar es el abandono del supuesto de que la tecnología presenta rendimientos constantes a escala. Los rendimientos a escala ahora pueden ser crecientes. En el caso de que los rendimientos a escala sean crecientes, podemos encontrarnos con situaciones en las cuales la productividad marginal del capital ya no sea decreciente, sino que puede ser constante o incluso creciente.

Básicamente, lo que estamos diciendo es que el resultado a nivel individual (empresa) no tiene porqué ser igual que a nivel agregado. Así, las empresas pueden enfrentarse a rendimientos decrecientes del capital, pero esto no tiene porqué ser cierto cuando estudiamos el conjunto de todas las empresas que operan en una economía.

Vamos a partir de una función de producción tipo Cobb-Douglas:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^\sigma \quad (9.1)$$

Con rendimientos constantes a escala ($\alpha + \sigma = 1$) tenemos que la productividad marginal del capital decreciente ($\alpha < 1$). La aportación del capital a la producción cada vez es menor. En el caso en que los rendimientos a escala sean crecientes ($\alpha + \sigma > 1$) podemos tener diferentes casos. Así, si $\alpha < 1$, de nuevo los rendimientos del capital serán decrecientes, si bien ahora si aumentamos al doble la cantidad de ambos factores productivos la producción aumenta en más del doble. Por el contrario si $\alpha = 1$, estaríamos en una situación en la cual los rendimientos del capital son constantes. A esto es lo que denominamos tecnología AK. Finalmente, si $\alpha > 1$, los rendimientos del capital serían crecientes.

9.2.1 Formas alternativas de introducir la tecnología AK

Existe una gran cantidad de elementos que pueden justificar el abandono del supuesto de que los rendimientos del capital son decrecientes. Esto da lugar a una gran variedad de modelos en función de los elementos que consideremos provocan que la función de producción no muestre rendimientos decrecientes en términos del capital. Algunas de ellas son las siguientes.

En primer lugar, la forma más simple de eliminar el supuesto de rendimientos decrecientes del capital es considerar al factor productivo trabajo como un tipo de capital. En este caso mediríamos tanto el factor productivo trabajo como el factor productivo capital en la misma unidad de medida, tal que fuesen equivalentes: $K_t = L_t$. En este caso, obtenemos directamente una función de producción con tecnología AK (rendimientos del capital constante) de forma directa:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = A_t K_t^\alpha K_t^{1-\alpha} = A_t K_t \quad (9.2)$$

Una segunda forma de eliminar el supuesto de rendimientos decrecientes del capital es introducir la existencia de capital público.

Ahora la economía tiene dos tipos de capital: el privado y el público. Dado que podemos agregar estos dos tipos de capital, es posible que los rendimientos de este stock de capital agregado dejen de ser decrecientes. Esto sucedería cuanto $\alpha + \eta$ fuese igual o superior a la unidad. En este caso podemos escribir la función de producción de la economía como:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha G_t^\eta L_t^{1-\alpha} = A_t K_t^{\alpha+\eta} L_t^{1-\alpha} \quad (9.3)$$

Otra forma alternativa consiste en incorporar la existencia de externalidades positivas en los procesos productivos. Esto significa que la producción de una empresa genera efectos positivos sobre las otras empresas. En términos generales, esto sería equivalente a suponer la existencia de una mayor dotación de capital productivo. Así, en la función de producción de la economía no sólo aparecería el stock de capital privado de las empresas, sino también la externalidad positiva que podemos reflejarla en términos de capital. Sería como si en la práctica la cantidad de capital que existe en la economía fuese mayor de la que realmente es. Esta externalidad medida en términos de capital la podemos definir como $\tilde{K}_t$, la cual la podemos agregar al stock de capital privado:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \tilde{K}_t^\eta = A_t K_t^{\alpha+\eta} L_t^{1-\alpha} \quad (9.4)$$

Finalmente, una de las formas más extendidas de introducir la tecnología del tipo AK consiste en incorporar el capital humano, como un factor productivo adicional. Este capital humano reflejaría no sólo el volumen de empleo, sino la calidad asociada al mismo. Esta calidad viene determinada por un proceso de acumulación, similar al proceso de acumulación del stock de capital físico. Por tanto, en este caso tendríamos una economía que realiza dos decisiones de inversión: invertir en capital físico e invertir en capital humano. Si suponemos que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala tendríamos:

$$Y_t = A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \quad (9.5)$$

donde H_t es el stock de capital humano. El proceso de acumulación de ambos factores lo podríamos definir como:

$$\dot{K}_t + \dot{H}_t = A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} - \delta_K K_t - \delta_H H_t - C_t \quad (9.6)$$

Dado el supuesto de rendimientos constantes a escala, tendríamos que:

$$\alpha \frac{Y_t}{K_t} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{H_t} \quad (9.7)$$

y despejando el stock de capital humano en función del stock de capital físico sería:

$$H_t = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} K_t \quad (9.8)$$

Finalmente, podemos sustituir la expresión anterior en la función de producción llegamos a una función de producción donde la productividad marginal del stock de capital es constante:

$$Y_t = A_t K_t \quad (9.9)$$

9.2.2 *El modelo neoclásico, el crecimiento endógeno y la tecnología AK*

En este apartado vamos a comparar los resultados que se obtienen del supuesto de rendimientos decrecientes respecto al capital respecto a los que se obtendrían en el caso en que los rendimientos respecto al capital fuesen constantes o crecientes. Para ello vamos apartir de la función de producción del tipo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala:

$$Y_t = AK_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (9.10)$$

En términos per cápita tendríamos:

$$y_t = Ak_t^\alpha \quad (9.11)$$

La ecuación de acumulación del capital correspondiente sería:

$$\dot{k}_t = sk_t^\alpha - (\delta + n)k_t \quad (9.12)$$

La tasa de crecimiento de la economía bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala y, por tanto, decrecientes respecto al factor productivo capital ($0 < \alpha < 1$) sería:

$$g_k = sAk_t^{\alpha-1} - (\delta + n) \quad (9.13)$$

tal y como aparece representada en la figura 9.1. En este caso el estado estacionario vendría dado por aquella situación en la cual la función de ahorro sea igual a la función de depreciación. Esto va a suceder debido a que la aportación del factor productivo a la producción cada vez es menor como consecuencia de la existencia de rendimientos decrecientes.

En el caso en que supongamos que existen rendimientos constantes respecto al capital (es a lo que denominamos tecnología AK), esto implica que el parámetro tecnológico de la función intensiva en capital es uno ($\alpha = 1$). Por tanto, la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita viene definida por:

$$g_k = sA - (\delta + n) \quad (9.14)$$

La representación gráfica de este caso aparece en la figura 9.2. Ahora la productividad marginal del capital es constante, por lo que el ahorro por unidad de capital también es una constante, equivalente a multiplicar la tasa de ahorro por la constante de productividad total de los factores. Si suponemos que sA es mayor que $\delta + n$, entonces la tasa de crecimiento de la economía es siempre positiva y constante, independientemente del stock de capital. Por otra parte, al ser constantes todos los elementos que definen la tasa de crecimiento, esto significa que no existe estado estacionario, ya que la función de ahorro no corta en ningún punto a la función de depreciación. En este caso hablaríamos de senda de crecimiento equilibrada de la economía, donde todas las variables crecerían a la misma tasa.

En el caso en que supongamos una tecnología con rendimientos crecientes del capital ($\alpha > 1$), de nuevo la expresión general para la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita vendría dada por:

$$g_k = sAk_t^{\alpha-1} - (\delta + n) \quad (9.15)$$

La figura 9.3 muestra el caso en que $1 < \alpha < 2$, mientras la figura 9.4 muestra el caso en que $\alpha > 2$. Tal y como podemos comprobar, de nuevo tenemos que en este caso la tasa de crecimiento de la economía es positiva. Sin embargo, ahora esta tasa de crecimiento no es constante, sino que es creciente a medida que aumentamos el stock de capital. En el primer caso, la tasa de crecimiento va aumentando conforme aumente el stock de capital, pero cada vez lo hace en menor proporción, hasta ser prácticamente constante para valores elevados

del stock de capital per cápita. Por el contrario, en el segundo caso la tasa de crecimiento aumenta a medida que aumenta el stock de capital, siendo cada vez mayor.

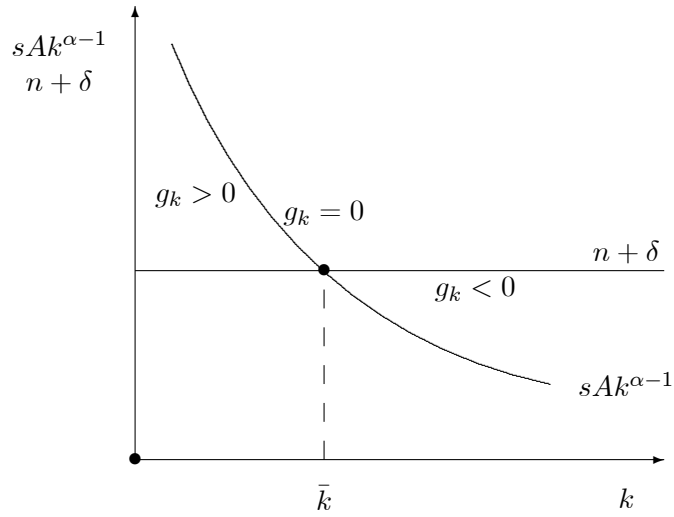


Figura 9.1. Rendimientos decrecientes del capital

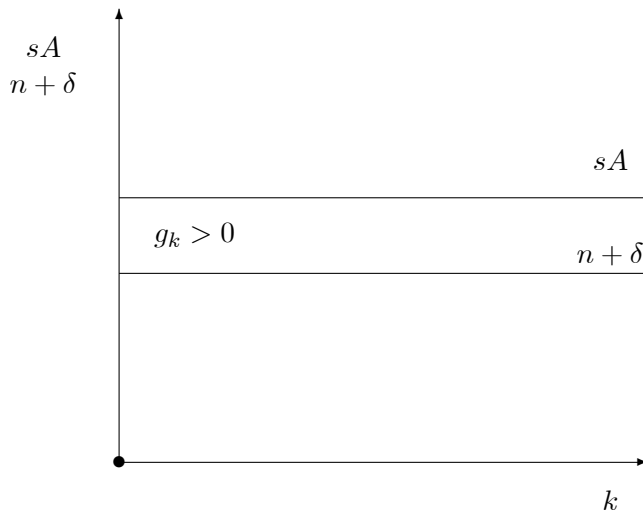


Figura 9.2. Rendimientos constantes del cpaital

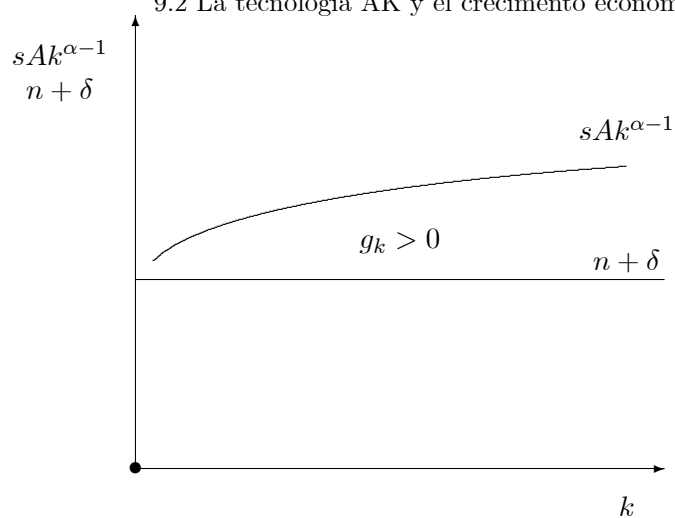


Figura 9.3. Rendimientos crecientes del capital ($1 < \alpha < 2$)

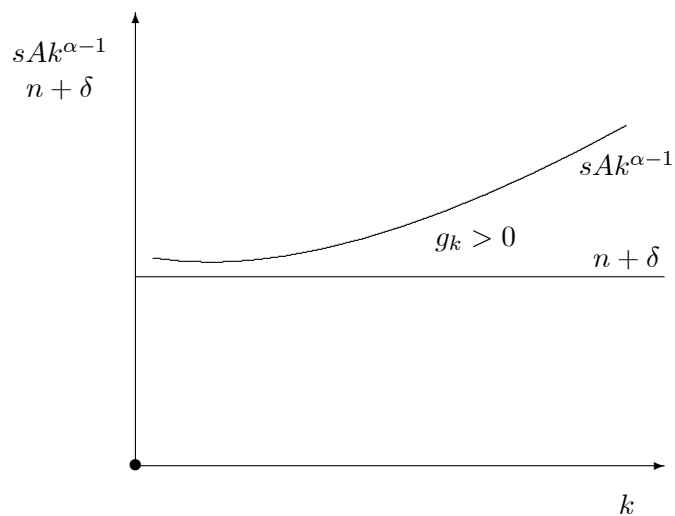


Figura 9.4. Rendimientos crecientes del capital ($\alpha > 2$)

De la comparación de los análisis realizados anteriormente podemos obtener las siguientes conclusiones:

- La tecnología AK implica la existencia de un crecimiento positivo de la economía, aún cuando no exista progreso tecnológico. En el caso de rendimientos decrecientes del

capital el crecimiento económico sólo es posible si existe desarrollo tecnológico. Sin embargo, con rendimientos del capital constantes o crecientes, incluso sin progreso tecnológico la economía mostraría una tasa de crecimiento positiva.

- Un aumento en la tasa de ahorro provoca aumentos permanentes en la tasa de crecimiento. Así, la decisión de una economía de aumentar su nivel de ahorro tiene efectos positivos para siempre, ya que aumenta la tasa de crecimiento de la economía no sólo en el momento en que se toma esa decisión, sino también en cualquier momento futuro.
- No existe el estado estacionario sino una senda de crecimiento equilibrado. Si los rendimientos el capital no son decrecientes, la tasa de crecimiento de la economía es siempre positiva, por lo que todas las variables aumentan con el paso del tiempo. En este caso lo que existe es una senda de crecimiento en la cual las variables macroeconómicas crecen a una tasa constante, a la que se denomina senda de crecimiento equilibrada.
- No hay relación entre el nivel de producción de una economía y su tasa de crecimiento. Un resultado clave de la existencia de rendimientos decrecientes del capital es el fenómeno de la convergencia: los países más pobres mostrarían tasas de crecimiento más elevadas que los países más ricos, por lo que sus diferencias irían reduciéndose con el tiempo. Este resultado únicamente ocurre bajo este supuesto. Si los rendimientos del capital no son decrecientes, entonces no existe el fenómeno de la convergencia. De hecho, puede darse exactamente el fenómeno contrario, un proceso de divergencia entre las economías ricas y las pobres. Con rendimientos constantes del capital, la tasa de crecimiento sería una constante, no dependiendo del nivel de renta per cápita. Si los rendimientos del capital fuesen crecientes, entonces serían las economías ricas las que mostrarían una tasa de crecimiento más elevada que las economías pobres.
- Finalmente, en un contexto de tecnología AK tendríamos que los efectos de una perturbación son permanentes. En el caso de rendimientos decrecientes del capital los efectos de cualquier perturbación son transitorios, ya que la economía se movería

al nuevo estado estacionario, donde el crecimiento volvería a ser cero. Sin embargo, si los rendimientos del capital no son decrecientes, entonces cualquier perturbación que se produzca tendrá efectos permanentes en el tiempo, dada la inexistencia de un estado estacionario en el cual la tasa de crecimiento de la economía vuelva a ser cero.

9.2.3 *La trampa de la pobreza*

En esta sección vamos a estudiar una posible explicación de porqué determinadas economías pobres parece que siempre van a estar en esa misma situación a partir de la denominada trampa de la pobreza. También utilizaremos este análisis para estudiar las posibles soluciones a la misma y explicar la existencia de los denominados milagros económicos. La trampa de la pobreza tiene su origen en la posibilidad de que existan diferentes tipos de rendimientos del capital de forma simultánea en función del desarrollo económico de un país. Así, es posible que en aquellas economías que inicialmente tienen un bajo nivel de stock de capital los rendimientos del capital sean decrecientes (su productividad es muy alta porque hay muy poco capital), pero que a medida que la economía sea más desarrollada, los rendimientos del capital crezcan hasta hacerse crecientes.

En este caso vamos a encontrar que la productividad marginal del capital primero es decreciente para posteriormente ser creciente. Por tanto, la función de ahorro por unidad de capital tendría en este caso forma de U. La figura 9.5 representa dicha situación. Ahora estaríamos reflejando una situación donde la función de ahorro por unidad de capital corta a la tasa de depreciación en dos puntos diferentes, el primero correspondiente a una situación de rendimientos decrecientes del capital y el segundo correspondiente a una situación de rendimientos crecientes del capital.

Sin embargo, aunque la función de depreciación corte a la función de ahorro en dos puntos, únicamente existe un sólo estado estacionario. Para comprobarlo vamos a analizar la dinámica. Si estamos a la izquierda del primer punto de corte, la tasa de crecimiento de la economía es positiva. En este caso, el ahorro es superior a la depreciación, por lo que aumenta el stock de capital y, por tanto, el nivel de producción de la economía en términos per cápita. Por el contrario, en toda la zona entre los dos puntos de corte,

el ahorro es inferior a la depreciación, por lo que el stock de capital disminuiría. A partir del segundo punto de corte, el ahorro vuelve a ser superior a la depreciación, por lo que de nuevo aumentaría el stock de capital per cápita.

Esta dinámica es la que da lugar a la denominada trampa de la pobreza. De hecho todas las situaciones entre ambos puntos de corte nos conducen al primer punto de corte, que es el estado estacionario. El problema radica que este estado estacionario se corresponde con un nivel de renta per cápita muy bajo. Si llevamos a cabo cualquier política para aumentar el nivel de stock per cápita, la economía entra en una senda de crecimiento negativa, volviendo al estado estacionario inicial. Esta es la trampa de la pobreza: un estado estacionario inicial al cual tiende la economía y que impide su crecimiento.

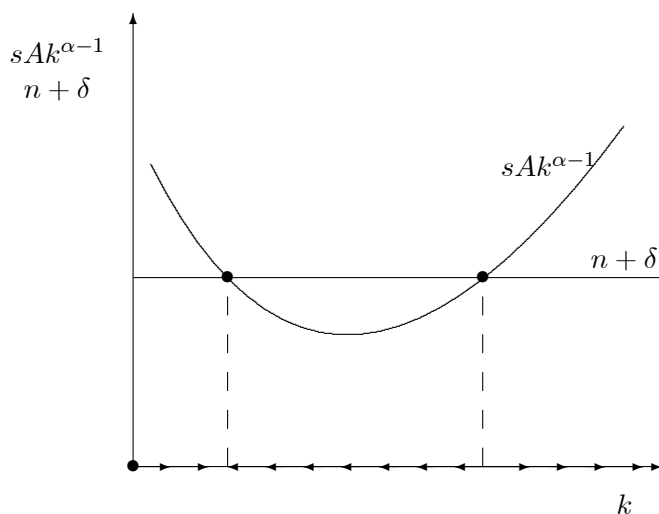


Figura 9.5. La trampa de la pobreza

Para evitar la trampa de la pobreza se requiere realizar una política que aumente de forma radical el stock de capital per cápita, tal que pase del estado estacionario inicial a un punto situado a la derecha del segundo punto de corte entre la función de ahorro y la función de depreciación. Sin embargo, este tipo de política es muy complicado de llevar a cabo en la práctica, al tiempo que la distancia a recorrer puede ser muy elevada, tal que lo haga imposible. Esta

situación puede explicar la situación en la que se encuentran muchas economías pobres. Estas economías no pueden alcanzar una senda de crecimiento si no es a partir de un determinado nivel de capital. Sin embargo, su stock de capital es muy bajo y cualquier intento por aumentarlo lleva a una situación de crecimiento negativo al tener que dedicar recursos a cubrir la depreciación de dicho capital.

Un ejemplo de como un país, bajo determinadas condiciones, puede llevar a cabo una política para abandonar la trampa de la pobreza lo tenemos en China y las medidas llevadas a cabo en los años sesenta para desarrollar el país. En los años sesenta China estaba entre los países más pobres del mundo, con enormes dificultades para alcanzar una senda de crecimiento positiva. El gráfico anterior podía ser de aplicación a este caso. En este contexto, el gobierno chino diseñó una política de desarrollo que se denominó política del gran salto, una de cuyas medidas más drásticas fue la política de un sólo hijo, lo que en términos de nuestro análisis implica una disminución en n . La idea era disminuir la pendiente de la función de depreciación tal que el estado estacionario de la economía se desplazase hacia la derecha o incluso desapareciese. En efecto, si aplicamos dicha política de disminución de la tasa de crecimiento de la población, obtenemos la situación que viene reflejada en la figura 9.6. De pronto, desaparece la trampa de la pobreza, ya que la disminución en la tasa de depreciación puede ser tal que en todos los niveles de stock de capital per cápita la tasa de crecimiento sea positiva. Ahora la dinámica de la economía nos llevaría a una senda de crecimiento económico continuado, dado que el stock de capital estaría aumentando de forma continuada en el tiempo.

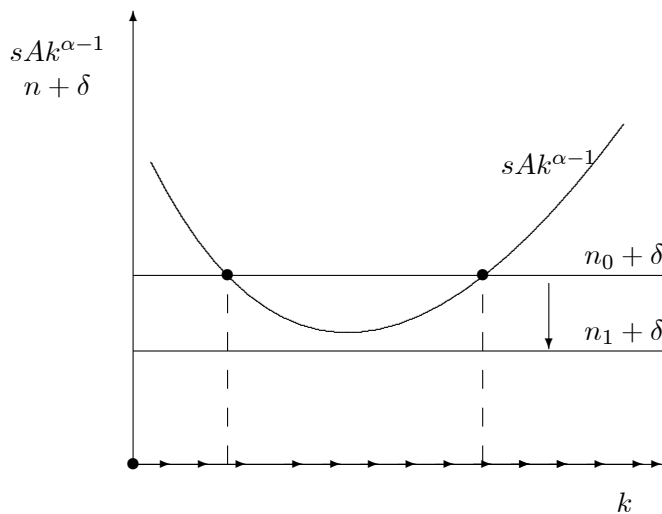


Figura 9.6. La política del gran salto

9.3 El modelo con rendimientos constantes del capital

En esta sección vamos a resolver el modelo de Ramsey, pero suponiendo que la función de tecnología es del tipo AK. La función a maximizar por parte de las familias sería:

$$V = \int_0^{\infty} U(c_t) e^{nt} e^{-\theta t} dt \quad (9.16)$$

sujeta a la restricción presupuestaria:

$$\dot{b}_t = R_t b_t - c_t - n b_t \quad (9.17)$$

Nótese que el salario no aparece en la restricción presupuestaria de los consumidores. Al existir tecnología AK tal y como la hemos definido, es como si sólo existiese un factor productivo, el capital físico. Si suponemos que la función de utilidad es logarítmica, el Hamiltoniano del problema del consumidor sería:

$$H = \ln c_t e^{(n-\theta)t} dt + \lambda_t [R_t b_t - c_t - n b_t] \quad (9.18)$$

Las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} - \lambda_t = 0 \quad (9.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -\dot{\lambda}_t = (R_t - n)\lambda_t \quad (9.20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{b}_t = R_t b_t - c_t - n b_t \quad (9.21)$$

De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{1}{c_t} e^{(n-\theta)t} = \lambda_t \quad (9.22)$$

De la segunda condición de primer orden obtenemos:

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -(R_t - n) \quad (9.23)$$

Sólo nos resta calcular la derivada respecto al tiempo del parámetro de Lagrange. Operando en las expresiones anteriores llegamos a la senda óptima del consumo per cápita que viene dada por:

$$\dot{c}_t = (R_t - \theta)c_t \quad (9.24)$$

Por otro lado, la empresas maximizan beneficios sujetas a la restricción tecnológica:

$$\max \Pi_t = Y_t - (R_t + \delta)K_t \quad (9.25)$$

Suponemos que la función de producción presenta rendimientos constantes respecto al capital, siendo:

$$Y_t = AK_t \quad (9.26)$$

El problema para las empresas en términos per cápita sería:

$$\max \pi_t = y_t - (R_t + \delta)k_t \quad (9.27)$$

siendo la función de producción intensiva en capital:

$$y_t = Ak_t \quad (9.28)$$

Calculando la condición de primer orden respecto al stock de capital per cápita resulta:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = A - (R_t + \delta) = 0 \quad (9.29)$$

Por tanto obtenemos que la productividad marginal del capital, que es igual a la constante A , es:

$$A = R_t + \delta \quad (9.30)$$

Por el que el tipo de interés de equilibrio sería:

$$R_t = A - \delta \quad (9.31)$$

El equilibrio viene dado por aquella situación en la cual los planes de los consumidores y de las empresas coinciden:

$$b_t = k_t \quad (9.32)$$

Sustituyendo el valor de equilibrio para el tipo de interés en la senda óptima de consumo:

$$\dot{c}_t = (A - \delta - \theta)c_t \quad (9.33)$$

Por su parte, la ecuación dinámica para el stock de capital per cápita la obtenemos a partir de la restricción presupuestaria:

$$\dot{b}_t = R_t b_t - c_t - n b_t \quad (9.34)$$

Dado que en equilibrio $b_t = k_t$:

$$\dot{k}_t = R_t k_t - c_t - n k_t \quad (9.35)$$

Sustituyendo los valores de equilibrio para el tipo de interés:

$$\dot{k}_t = (A - \delta)k_t - c_t - n k_t \quad (9.36)$$

$$\dot{k}_t = (A - \delta - n)k_t - c_t \quad (9.37)$$

Por tanto, la economía se representa a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{c}_t = (A - \delta - \theta)c_t \quad (9.38)$$

$$\dot{k}_t = (A - \delta - n)k_t - c_t \quad (9.39)$$

Si suponemos que la senda óptima del consumo tiene pendiente positiva entonces:

$$A > \delta + \theta > \delta + n \quad (9.40)$$

por lo que la tasa de crecimiento del consumo per cápita es igual a:

$$g_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = A - \delta - \theta > 0 \quad (9.41)$$

En este caso no existe estado estacionario, ya que las variables per cápita no son constantes en ningún momento del tiempo, incluso en el caso, tal y como hemos supuesto, en el que no existe progreso tecnológico (A es una constante). En este caso la economía sigue una senda de crecimiento equilibrado, en la cual todas las variables crecen a la misma tasa.